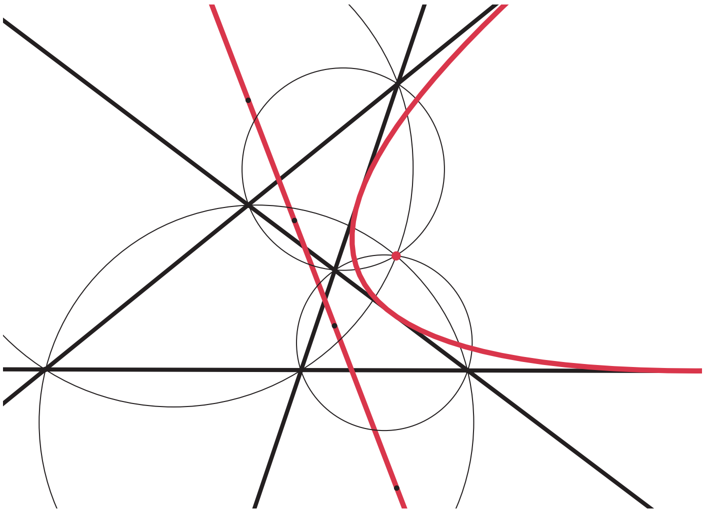
O ortocentrach i parabolach, a zwłaszcza o twierdzeniu odwrotnym Steinera

*Piotr PIKUL**

*student, Uniwersytet Jagielloński

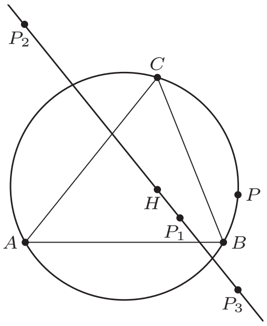
W *Delcie* 11/2017 został przedstawiony (bez dowodu) fakt, że dla czterech dowolnych prostych (tak dowolnych, że są parami nierównoległe i żadne trzy nie mają punktu wspólnego) ortocentra wyznaczonych przez nie czterech trójkątów leżą na jednej prostej, a okręgi opisane na tych trójkątach mają punkt wspólny. Ponadto parabola, której kierownicą jest prosta zawierająca ortocentra, a ogniskiem punkt wspólny okręgów opisanych jest styczna do czterech wyjściowych prostych (rys. 1).



Rys. 1

Z przyczyn dla mnie samego niejasnych ta ciekawostka spowodowała, że – chyba pierwszy raz od matury – pochyliłem się nad planimetrią. W dalszej części można się zapoznać z dowodem, którym zaowocowały moje rozważania. Skorzystamy w nim z następujących twierdzeń, które same w sobie są całkiem interesujące:

Twierdzenie 1 (Steiner)**.** *Jeśli punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC, to odbicia symetryczne punktu P względem prostych AB, BC i AC leżą na jednej prostej, przechodzącej przez ortocentrum trójkąta ABC* (rys. 2). Prostą tę nazywamy prostą Steinera punktu P w trójkącie ABC.



Rys. 2. Punkty P_1, P_2, P_3 to odbicia punktu P względem prostych AB, BC i CA. Punkt H to ortocentrum trójkąta ABC.

Dowód tego twierdzenia został omówiony na łamach *Delty* w listopadzie 2016 roku. Na potrzeby dalszych rozważań bardziej będzie nam potrzebne **twierdzenie odwrotne**.

Twierdzenie 2. *Dany jest trójkąt ABC i punkt P. Jeśli obrazy punktu P w symetriach względem boków trójkąta ABC leżą na jednej prostej, wtedy punkt P leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Ponadto prosta zawierająca odbicia symetryczne punktu P, zawiera ortocentrum trójkąta ABC.*

Kolejną wariację na temat twierdzenia Steinera pozwolę sobie nazwać **twierdzeniem dualnym**, ponieważ zamienia ono niejako rolę prostych i punktów.

Twierdzenie 3. *Dany jest trójkąt ABC i prosta p przechodząca przez ortocentrum trójkąta ABC. Wtedy odbicia p względem boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, leżącym na okręgu opisanym na trójkącie ABC.*

Brakuje tutaj czwartego twierdzenia – „odwrotnego do dualnego”, które nie będzie nam potrzebne. Jego sformułowanie (i udowodnienie) pozostawiamy Czytelnikowi.

Zanim przejdziemy do dowodów powyższych twierdzeń, przyjrzyjmy się, jak z ich pomocą można udowodnić wyjściowy *problem czterech prostych.*

Niech a, b, c, d będą czterema danymi prostymi. Niech D oznacza ortocentrum trójkąta abc, a C oznacza ortocentrum trójkąta abd. Na mocy Twierdzenia 3 odbicia prostej CD względem prostych a, b i c przecinają się w pewnym punkcie okręgu opisanego na trójkącie abc, a jej odbicia względem prostych a, b i d również mają wspólny punkt, leżący na okręgu opisanym na trójkącie abd. Musi to być ten sam punkt. Nazwijmy go P.

Odbicia punktu P względem prostych a, b, c i d leżą na prostej CD, więc (na mocy Twierdzenia 2) punkt ten leży na okręgach opisanych na każdym z trójkątów abc, bcd, abd i acd, a prosta CD zawiera ortocentra wszystkich tych trójkątów. Związek współliniowości ortocentrów ze wspólnym punktem okręgów opisanych, który został wspomniany w wyjściowym artykule jako podejrzenie/wskazówka, jest wyraźnie widoczny.

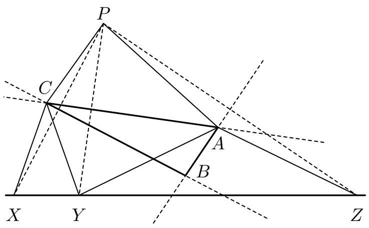
Teraz należy jeszcze wykazać, że parabola wyznaczona przez ognisko P i kierownicę CD jest styczna do prostych a, b, c i d. Skorzystamy tu z następującego faktu, którego uzasadnienie można znaleźć w *Deltoidzie* 6/2018:

Lemat 1 (charakteryzacja stycznych do paraboli)**.** *Prosta jest styczna do paraboli o ognisku F i kierownicy f wtedy i tylko wtedy, gdy jest symetralną pewnego odcinka łączącego F z punktem na f.*

Ponieważ wiemy, że odbicia symetryczne P względem prostych a, b, c i d leżą na CD, natychmiast otrzymujemy, że a, b, c i d są styczne do interesującej nas paraboli. Kończy to dowód przytoczonego na wstępie faktu. $\square$

Przedstawione rozumowanie pokazuje w dodatku, że punkt okręgu opisanego i jego prosta Steinera wyznaczają parabolę styczną do prostych zawierających boki trójkąta. Można się zastanowić, czy jest to jednoznaczna charakteryzacja wszystkich takich parabol. Tutaj nie będziemy tego rozważać.

Teraz pozostaje już tylko udowodnić twierdzenia 2 i 3. Zaczniemy od dowodu *twierdzenia odwrotnego*.



Zaprezentowane rozumowanie może wydawać się zależne od przedstawionej na rysunku konfiguracji punktów. Wykorzystywane równości są jednak prawdziwe nawet jeśli uznamy, że dotyczą kątów skierowanych, co uwalnia nas od potrzeby rozważania przypadków.

Niech X, Y i Z będą odbiciami punktu P względem prostych, kolejno BC, AC i AB. Jeśli X, Y i Z nie są parami różne, punkt P musi pokrywać się z jednym z wierzchołków trójkąta (więc, oczywiście, leży na okręgu opisanym). Podobnie jest w przypadku, gdy P leży na prostej XYZ. Powinno się to stać jasne, jeśli zauważymy, że trójkąt ABC jest wyznaczony przez symetralne odcinków PX, PY i PZ. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że punkt Y leży pomiędzy X i Z. Dowód sprowadza się do przeliczeń na kątach. Na początku zauważamy następujące równości:

$$\sphericalangle CXY = \sphericalangle XYC, \quad \sphericalangle AYZ = \sphericalangle YZA, \quad \sphericalangle APC = \sphericalangle CYA,$$
$$\sphericalangle PCB = \sphericalangle BCX, \quad \sphericalangle BAP = \sphericalangle ZAB,$$
$$\sphericalangle XYC + \sphericalangle CYA + \sphericalangle AYZ = 180^\circ.$$

Analizując trójkąt wyznaczony przez proste AB, BC i XZ, otrzymujemy:

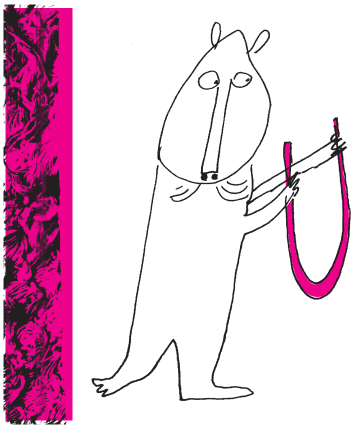
$$180^\circ = \sphericalangle CBA + (180^\circ - \sphericalangle BCX - \sphericalangle CXY) + (180^\circ - \sphericalangle YZA - \sphericalangle ZAB).$$

Podstawiając poprzednie równości, otrzymujemy:

$$180^\circ = \sphericalangle CBA + 180^\circ - \sphericalangle PCB + \sphericalangle APC - \sphericalangle BAP,$$

zatem $\sphericalangle PCB + \sphericalangle BAP = \sphericalangle CBA + \sphericalangle APC$. Ostatnia równość oznacza, że czworokąt $BAPC$ jest wpisany w okrąg, czyli to, co należało wykazać. Dzięki *podstawowemu* twierdzeniu Steinera prosta zawierająca odbicia symetryczne pewnego punktu z okręgu opisanego względem boków trójkąta przechodzi przez ortocentrum. $\square$

Na zakończenie udowodnimy *twierdzenie dualne.*



Odbicia symetryczne prostej przechodzącej przez ortocentrum mają punkty wspólne z okręgiem opisanym (np. odbicia ortocentrum). Zauważmy, że jeśli obraz jest styczną, musi być równoległy do boku trójkąta, a tym samym do wyjściowej prostej. Ta zaś może być równoległa do co najwyżej jednego boku trójkąta, więc przynajmniej dwa jej odbicia nie są stycznymi.

Wiemy zatem, że pewien obraz wyjściowej prostej ma drugi punkt wspólny z okręgiem. Oznaczmy ten punkt przez P. Prosta Steinera punktu P musi być wyjściową prostą, ponieważ ma z nią co najmniej dwa punkty wspólne (ortocentrum i pewne odbicie P).

To kończy dowód, ponieważ każdy punkt okręgu opisanego leży na odbiciu symetrycznym swojej prostej Steinera względem dowolnego boku trójkąta. $\square$

Miło jest czasem powrócić do geometrii.