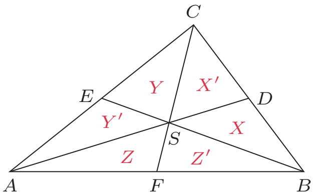
Środkowe i pola

Joanna JASZUŃSKA

Środkowa trójkąta to odcinek łączący wierzchołek ze środkiem przeciwległego boku. Środkowe przecinają się w jednym punkcie, zwanym *środkiem ciężkości* i dzieli on każdą z nich w stosunku $2:1$, licząc od wierzchołka trójkąta (rys. 1).

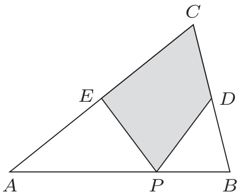


Rys. 1. Punkty D, E, F to środki boków, X, X', Y, Y', Z, Z' oznaczają pola.

Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

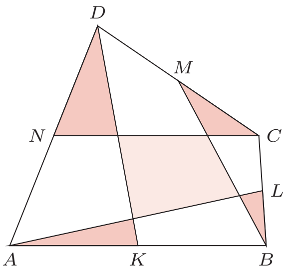
1. Wykaż, że środkowa dzieli trójkąt na dwa trójkąty o równych polach.

2. Punkty D i E są środkami odpowiednio boków BC i CA trójkąta ABC, punkt P leży na boku AB (rys. 2). Wyznacz możliwe wartości $[PDCE]:[ABC]$.



Rys. 2

3. Punkty K, L, M, N są środkami boków czworokąta wypukłego $ABCD$ (rys. 3). Wykaż, że suma pól ciemnych trójkątów równa jest polu jasnego czworokąta.



Rys. 3

4. Wykaż, że środkowe dzielą trójkąt na sześć trójkątów o równych polach.

5. Punkt T należy do wnętrza trójkąta ABC oraz $[ABT]=[BCT]=[CAT]$. Wykaż, że T jest środkiem ciężkości trójkąta ABC.

6. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty K i L są środkami boków CD i DA. Proste BK i BL przecinają przekątną AC odpowiednio w punktach M i N. Wykaż, że $[ALN]+[BMN]+[CKM]=\frac{1}{3}[ABCD]$ oraz że $AN=NM=MC$.

7. Wykaż, że ze środkowych dowolnego trójkąta można zbudować trójkąt.

8. Wyznacz pole trójkąta o środkowych długości: (a) 9, 12, 15, (b) 12, 15, 18.

9. W trapezie $ABCD$ podstawa AB jest dwa razy dłuższa od podstawy CD. Punkt Q jest środkiem przekątnej AC, a prosta BQ przecina bok AD w punkcie P. Wyznacz $[PQCD]:[ABCD]$.

Rozwiązania i wskazówki

W rozwiązaniach zadań o trójkątach przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 1.

R1. Trójkąty CFA, CFB mają podstawy równe $\frac{1}{2}AB$ i wspólną wysokość z C. $\square$

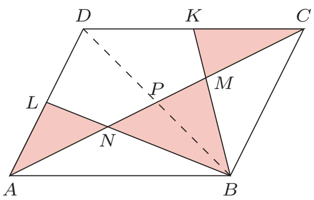
R2. $[PDCE]:[ABC]=1:2$, gdyż $[PDC]=[PDB]$ oraz $[PEC]=[PEA]$. $\square$

R3. Odcinki AL i CN są środkowymi odpowiednio w trójkątach ABC i CDA. Stąd i z zadania 1 mamy $[ABL]+[CDN]=\frac{1}{2}[ABC]+\frac{1}{2}[CDA]=\frac{1}{2}[ABCD]$. Podobnie $[BDK]+[BDM]=\frac{1}{2}[ABCD]$. Zatem $[ABL]+[CDN]=[BMDK]$, co, po odjęciu od obu stron ich części wspólnej, kończy dowód. $\square$

Inne rozwiązanie zadania 4 znaleźć można w *deltoidzie* 11/2009. Polecam również zad. 8 tamże i zad. 1 z *deltoidu* 5/2016.

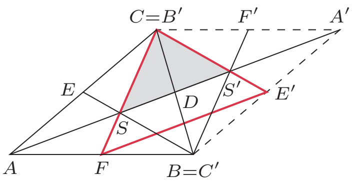
R4. Z zadania 1 mamy $Z=Z'$, gdyż SF jest środkową w trójkącie ABS (rys. 1). Analogicznie $X=X'$ i $Y=Y'$. Ale także $X+X'+Z'=Y+Y'+Z$, bo CF jest środkową trójkąta ABC, co wobec powyższego daje $X=Y$. Podobnie $Y=Z$. $\square$

R5. Można przyjąć, że T leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta ABS. Wtedy jeśli $T\neq S$, to $[ABT]<[ABS]$. Z treści zadania wynika, że $[ABT]=\frac{1}{3}[ABC]$, a z zadania 4 wiemy, że $[ABS]=\frac{1}{3}[ABC]$. Stąd $[ABT]=[ABS]$, więc $T=S$. $\square$



Rys. 4

R6. Niech przekątne równoległoboku mają wspólny środek P (rys. 4). Odcinki AP i BL oraz CP i BK są zatem środkowymi odpowiednio w trójkątach ABD i BCD. Trójkąty te mają pola równe $\frac{1}{2}[ABCD]$ i na mocy zadania 4 ich środkowe dzielą każdy z nich na sześć trójkątów o równych polach. Stąd $[ALN]+[BMN]+[CKM]=(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6})\cdot\frac{1}{2}[ABCD]=\frac{1}{3}[ABCD]$. Ponadto $AN=\frac{2}{3}AP=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AC=\frac{1}{3}AC$, podobnie $MC=\frac{1}{3}AC$, więc też $NM=\frac{1}{3}AC$. $\square$



Rys. 5. X' oznacza obraz punktu X.

R7. Obróćmy trójkąt ABC o $180°$ wokół punktu D (rys. 5). Boki trójkąta CFE' mają długości $FE'=\frac{1}{2}AA'=AD$, $CE'=BE$ oraz CF. $\square$

R8. (a) Niech $AD=15$, $BE=12$, $CF=9$. Obróćmy trójkąt ABC o $180°$ wokół punktu D (rys. 5). Trójkąt $SS'C$ ma wówczas boki o długościach $SS'=2\cdot\frac{1}{3}AD=2\cdot 5$, $S'C=\frac{2}{3}BE=2\cdot 4$ oraz $CS=\frac{2}{3}CF=2\cdot 3$, jest więc prostokątny. Stąd jego pole równe jest $\frac{1}{2}\cdot(2\cdot 3)\cdot(2\cdot 4)=24$. Jednocześnie na mocy zadania 4 wiemy, że pole to równe jest $\frac{2}{6}$ pola trójkąta ABC, zatem $[ABC]=72$. $\square$

Wzór Herona na pole trójkąta: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, gdzie a, b, c to boki, p – połowa obwodu.

Wskazówka 8. (b) Postępuj analogicznie, skorzystaj z wzoru Herona.

Wskazówka 9. Narysuj równoległobok $ABCE$.