Odbicia w paraboli

Joanna JASZUŃSKA

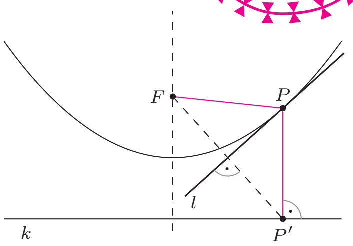
deltoid 114

Parabola to zbiór punktów płaszczyzny równo odległych od ustalonego punktu F, zwanego *ogniskiem*, i od ustalonej nieprzechodzącej przez F prostej k, zwanej *kierownicą* (rys. 1). Z definicji tej wynika, że parabola ma oś symetrii przechodzącą przez ognisko i prostopadłą do kierownicy oraz że wszystkie punkty paraboli leżą w tej półpłaszczyźnie wyznaczonej przez kierownicę, do której należy ognisko.

Styczna do paraboli to taka prosta, która ma z nią dokładnie jeden punkt wspólny, a wszystkie inne punkty paraboli znajdują się po jednej stronie tej prostej.

Fakt. Każdy punkt P' z kierownicy jest rzutem dokładnie jednego punktu P paraboli (należącego do symetralnej odcinka FP', wówczas $PF = PP'$).

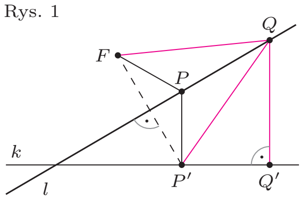
Rozważmy dowolny punkt P paraboli, jego rzut P' na kierownicę k oraz prostą l zawierającą dwusieczną kąta FPP' (rys. 1). Z definicji paraboli $PF = PP'$, więc prosta l jest też symetralną odcinka FP'. Wykażemy, że l jest styczną.



Rys. 1

Twierdzenie 1. Prosta l nie ma z parabolą punktów wspólnych innych niż P.

Dowód. Przypuśćmy, że do prostej l należy jeszcze jakiś punkt paraboli $Q \neq P$, niech Q' będzie jego rzutem na k (rys. 2). Wówczas $QF = QP'$, bo Q leży na symetralnej l odcinka FP', a także $QF = QQ'$, bo Q należy do paraboli. Zatem $QP' = QQ'$, czyli $P' = Q'$, sprzecznie z faktem powyżej. $\square$

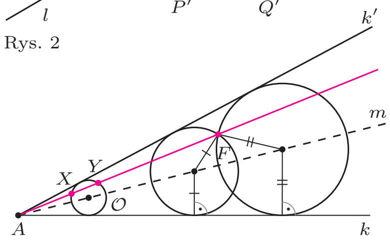


Rys. 2

Twierdzenie 2. Punkty paraboli inne niż P leżą po tej stronie l, co ognisko F.

Dowód. Przypuśćmy, że jakiś punkt Q paraboli leży po przeciwnej stronie l niż F, niech Q' będzie jego rzutem na k. Wówczas, kolejno z własności symetralnej i rzutu, uzyskujemy $QF > QP' \geqslant QQ'$, sprzecznie z definicją paraboli. $\square$

Twierdzenie 3. Prosta l jest *jedyną* styczną do paraboli w punkcie P.



Rys. 3. $\mathcal{O}$ – dowolnie wybrany okrąg

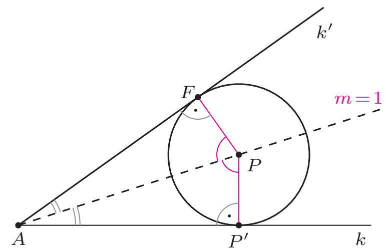
Dla $m \perp k$ na mocy faktu istnieją punkty paraboli po obu stronach m, więc m nie jest styczną. Dla $m \parallel k$ i P nie na osi symetrii istnieje drugi punkt paraboli na m, czyli m też nie jest styczną. Dla $m \parallel k$ i P na osi symetrii dowód jest analogiczny do opisanego ($m = l$).

Dowód. Rozważmy prostą m przez P dla $m \not\perp k$ oraz $m \nparallel k$. Niech k' – obraz k w symetrii względem m. Oznaczmy przez α ten z kątów utworzonych przez k i k', który zawiera P (m jest jego dwusieczną), wierzchołek α nazwijmy A.

Wtedy P leży na dwusiecznej α i $PF = PP'$, więc F nie może leżeć na zewnątrz α.

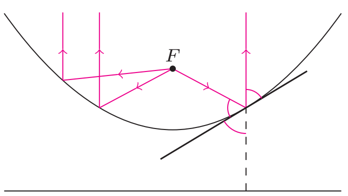
Jeśli F leży wewnątrz α, to półprosta $AF^{\to}$ przecina okrąg $\mathcal{O}$ wpisany w kąt α w dwóch punktach X i Y (rys. 3). Jednokładności o środku A przekształcające X na F i Y na F przeprowadzają $\mathcal{O}$ na dwa różne okręgi wpisane w α i przechodzące przez F. Ich środki leżą na m i są tak samo odległe od F jak od k, więc leżą też na paraboli. Wobec tego m nie jest do niej styczna.

Jeśli F leży na k', to istnieje jedyny okrąg wpisany w α, przechodzący przez F, więc jego środek P to jedyny punkt m należący do paraboli. Wówczas m zawiera dwusieczną kąta FPP' (rys. 4), czyli $m = l$, co kończy dowód. $\square$



Rys. 4

Wniosek. Z równości kątów przy dwusiecznej l (rys. 5) wynika, iż promienie światła wychodzące z ogniska i odbijające się od lustrzanej paraboli wedle reguły *kąt padania równy jest kątowi odbicia* wędrują dalej jako wiązka równoległa do osi symetrii. Również na odwrót, wiązka promieni równoległych do osi symetrii po odbiciu skupia się w ognisku. Tak samo jest dla trójwymiarowej *paraboloidy* otrzymanej przez obrócenie paraboli wokół jej osi symetrii.



Rys. 5

Korzystając z opisanej własności rozpala się ogień olimpijski (ilustracja 3 na tylnej okładce), gotuje (9) i topi metale w temperaturze 3500°C (2). Kształt wycinka paraboloidy mają anteny satelitarne, mogą one być ustawiane pionowo, a ognisko nie musi być nad środkiem talerza (4). Są też teleskopy z płynnym lustrem z rtęci, przybierającym kształt paraboloidy wskutek kręcenia się ze stałą prędkością wokół swej osi – te z kolei mogą być tylko skierowane w górę (5). Własności paraboloid stosuje się w mikrofonach szpiegowskich i ornitologicznych (1), konstrukcje o zbliżonym kształcie służyły też w Anglii w czasie I Wojny Światowej do nasłuchiwania, czy nadlatują niemieckie sterowce z bombami (7). Dwa paraboloidalne talerze ustawione naprzeciw siebie umożliwiają szeptanie na odległość (6). Na podobnej zasadzie powstaje iluzja monety leżącej na górze „ufo” (10) – w rzeczywistości moneta ta leży na dnie paraboloidalnej lustrzanej miseczki (8).

Dziękuję Jerzemu Bednarczukowi za pomoc w przygotowaniu tego artykułu.