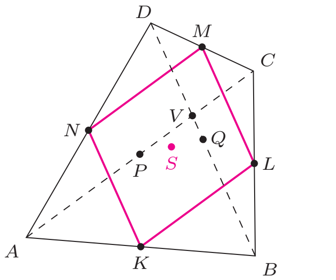
Wysokości czworokąta

Joanna JASZUŃSKA

Wysokością czworokąta nazwijmy prostą przechodzącą przez środek jego boku i prostopadłą do boku przeciwległego. W niektórych czworokątach wszystkie cztery wysokości przecinają się w jednym punkcie – *ortocentrum czworokąta.* Przykładowo kwadrat ma ortocentrum, a romb niebędący kwadratem nie ma.



Rys. 1. K, L, M, N, P, Q są środkami odpowiednich boków i przekątnych.

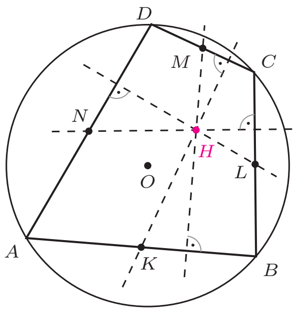
Rozważmy czworokąt $ABCD$. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunkach 1 i 2.

Lemat. $KLMN$ to równoległobok, a jego środek S jest też środkiem odcinka PQ.

W dowodzie można wykorzystać np. linię środkową (*deltoid* 5/2017) lub środki ciężkości (*deltoid* 12/2011), a przy okazji wykazać, że punkt S jest środkiem ciężkości układu punktów A, B, C, D.

Twierdzenie. Czworokąt ma ortocentrum wtedy i tylko wtedy, gdy można na nim opisać okrąg.

Dowód. Na mocy lematu, symetria środkowa względem S przeprowadza punkt M na K, a wysokość z M na prostą przez K i prostopadłą do AB, czyli na symetralną boku AB. Analogicznie obrazami pozostałych wysokości są odpowiednie symetralne boków. Wobec tego ortocentrum czworokąta istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wspólny punkt symetralnych jego boków, czyli środek okręgu opisanego. □



Rys. 2. H – ortocentrum czworokąta

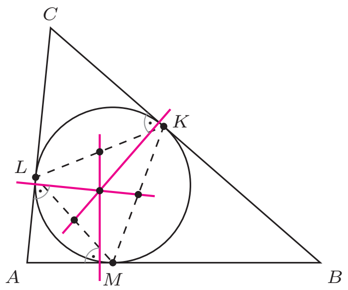
Wniosek. Punkty H, S, O leżą na jednej prostej, w tej kolejności i $HS = SO$.

W zadaniach 1, 2, 4 i 5 zakładamy, że czworokąt $ABCD$ ma ortocentrum.

1. Udowodnij, że punkt H jest ortocentrum trójkąta PQV.

2. Niech proste AB i CD przecinają się w punkcie W. Wykaż, że $WH \perp KM$.

3. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Udowodnij, że proste przechodzące przez środki odcinków KL, LM, MK i prostopadłe odpowiednio do boków AB, BC, CA przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 3

Rozwiązania

R1. Wiemy, że symetria względem S zamienia punkty P i Q oraz punkty O i H. Symetralna odcinka AC jest do niego prostopadła, przechodzi przez jego środek P i przez O – środek okręgu, w którym AC jest cięciwą. Jej obrazem w symetrii względem S jest więc prosta prostopadła do AC, przechodząca przez Q (czyli wysokość trójkąta PQV) i przez H. Analogicznie wysokość trójkąta PQV z wierzchołka P też przechodzi przez H, co kończy dowód. □

R2. Proste KH i MH są wysokościami trójkąta KMW, więc WH też jest. □

R3. Niech S oznacza środek ciężkości trójkąta KLM (rys. 3). Wówczas jednokładność o środku S i skali -2 przeprowadza środek odcinka KL na punkt M. Wobec tego przy tej jednokładności obrazem prostej przechodzącej przez tenże środek i prostopadłej do AB jest prosta przechodząca przez punkt M i prostopadła do AB, czyli prosta przechodząca przez środek I okręgu wpisanego w trójkąt ABC. Analogicznie obrazami pozostałych opisanych w zadaniu prostych też są proste przez I. Stąd również wyjściowe proste są współpękowe. □

Polecam hasła *maltitudes* i *anticenter* na stronie `www.cut-the-knot.org`.

Zadania domowe

4. Niech H_A, H_B, H_C, H_D będą odpowiednio ortocentrami trójkątów BCD, CDA, DAB, ABC. Wykaż, że odcinki AH_A, BH_B, CH_C, DH_D mają wspólny punkt.

Wskazówka. Punkt H jest ich wspólnym środkiem.

Wynika stąd dodatkowo, że czworokąty $ABCD$ oraz $H_AH_BH_CH_D$ są przystające, co daje inne rozwiązanie zadania 4 z *deltoidu* 3/2010.

5. Niech O' i O'' oznaczają odbicia symetryczne punktu O względem prostych AB i CD. Udowodnij, że punkt H leży na prostej $O'O''$.

6. Udowodnij, że płaszczyzny przechodzące przez środki krawędzi czworościanu i prostopadłe do przeciwległych krawędzi mają wspólny punkt (*punkt Monge'a*).

7. Wykaż, że w każdym trójkącie ortocentrum H, środek ciężkości S i środek okręgu opisanego O leżą na jednej prostej (*prostej Eulera*), w tej kolejności i $HS = 2 \cdot SO$.

Dowód znaleźć można m.in. w *deltoidzie* 2/2010.

8. Wykaż, że w dowolnym trójkącie proste równoległe do dwusiecznych poprowadzone przez środki przeciwległych boków przecinają się w jednym punkcie.