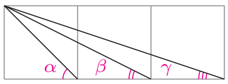
Pasujemy do siebie!

Joanna JASZUŃSKA

W wielu zadaniach, w których występują kąty lub ich sumy, przydatne bywa przeniesienie pewnych figur tak, by kąty te znalazły się obok siebie. Szczególnie wygodne jest to wtedy, gdy suma pewnych kątów równa jest np. $90°$ lub $360°$, a także, gdy niektóre z danych odcinków są równej długości.

1. Dane są trzy kwadraty, ustawione jak na rysunku 1. Oblicz $\alpha+\beta+\gamma$.



Rys. 1

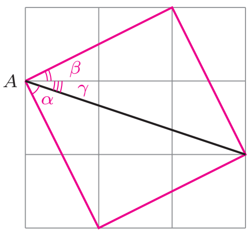
2. Wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ leży taki punkt P, że spełnione są równości $\sphericalangle ABP = \sphericalangle BAP = \sphericalangle CDP = \sphericalangle DCP = \sphericalangle EFP = \sphericalangle FEP = 45°$. Udowodnij, że suma długości odcinków BC, DE i FA jest nie mniejsza od każdego z odcinków AB, CD i EF.

3. Dany jest pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym $BC = CD$, $DE = EA$, $\sphericalangle BCD = \sphericalangle DEA = 90°$. Udowodnij, że z odcinków o długościach AC, CE, EB można zbudować trójkąt. Wyznacz miary jego kątów, znając miarę α kąta ACE i miarę β kąta BEC.

4. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ wszystkie boki są równej długości oraz $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F$. Udowodnij, że przekątne AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.

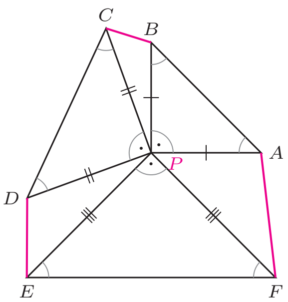
Rozwiązania

R1. Kolorowy czworokąt na rysunku 2 jest kwadratem, gdyż jego boki są przekątnymi prostokątów o wymiarach 2×1, na przemian „pionowych" i „poziomych". Przy wierzchołku A schodzą się kąty α, β, γ z treści zadania: między odpowiednimi bokami a przekątnymi w kolorowym kwadracie i w prostokątach 2×1 oraz 3×1. Stąd $\alpha+\beta+\gamma = 90°$. $\square$



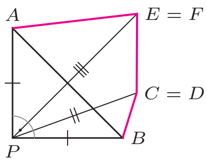
Rys. 2

R2. Z równości kątów w treści zadania wynika, że trójkąty APB, CPD, EPF są prostokątne równoramienne (rys. 3). Stąd $AP = BP$, $CP = DP$, $EP = FP$ oraz $\sphericalangle BPC + \sphericalangle DPE + \sphericalangle FPA = 360° - 3\cdot 90° = 90°$.



Rys. 3

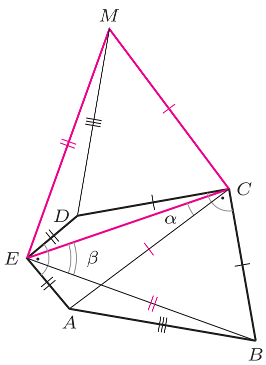
Wobec tego trójkąty BPC, DPE, FPA oraz odbity symetrycznie trójkąt prostokątny równoramienny APB można ustawić jak na rysunku 4. Kolorowa łamana ma wówczas długość $BC + DE + FA$, nie mniejszą od odcinka AB łączącego jej końce. Dowód dla odcinków CD i EF przebiega analogicznie. $\square$



Rys. 4

R3. Suma kątów wewnętrznych pięciokąta to $540°$, więc z założenia wnioskujemy, że w rozważanym pięciokącie $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle D = 540° - 2\cdot 90° = 360°$. Stąd i z danych równości boków wynika, że z trójkątów EAB, ABC i CDE można złożyć trójkąt CEM tak jak na rysunku 5, o bokach żądanej długości: $MC = AC$, CE, $EM = EB$.

Ponadto skoro $\sphericalangle BCD = 90°$, to także $\sphericalangle ACM = 90°$ (gdyż kąty ACB i MCD są przystające), a więc $\sphericalangle ECM = 90° - \alpha$. Analogicznie $\sphericalangle CEM = 90° - \beta$ i wobec tego $\sphericalangle CME = 180° - \sphericalangle ECM - \sphericalangle CEM = \alpha + \beta$. $\square$

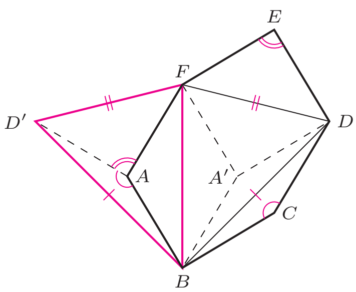


Rys. 5

R4. Suma kątów wewnętrznych sześciokąta to $720°$, więc z założenia wnioskujemy, że $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = 360°$. Stąd i z równości wszystkich boków sześciokąta wynika, że z trójkątów równoramiennych FAB, BCD, DEF można złożyć trójkąt BFD' w sposób przedstawiony na rysunku 6.

Trójkąty BFD' i BFD są przystające (gdyż mają równe odpowiednie boki) oraz symetryczne względem prostej BF. Niech A' będzie obrazem punktu A w tej symetrii. Wówczas odcinki $A'D$, $A'B$, $A'F$ mają długości równe bokom sześciokąta.

Stąd czworokąty $FABA'$, $BCDA'$, $DEFA'$ są rombami, a więc $ABDE$ jest równoległobokiem (bo odcinki AB i DE są równe i równoległe). Wobec tego przekątne AD i BE mają wspólny środek. Analogicznie przekątne AD i CF mają wspólny środek, co kończy dowód. $\square$



Rys. 6

Zadanie 1 rozwiązano inaczej w *deltoidzie* 5/2009. Zadanie 2 pochodzi z książki W. Pompe *Wokół obrotów* (Wyd. Szkolne Omega, 2016). Zadania 3 i 4 pochodzą z LVIII i LV Olimpiady Matematycznej.