Tak samo, ale zupełnie inaczej

Marek KORDOS

Geometrzy od dawna marzyli o współrzędnych jednorodnych, czyli takich n-tkach liczb (dalej dla uproszczenia będzie mowa o parach i trójkach) przyporządkowanych punktom, że gdy wszystkie liczby w n-tce pomnożymy przez tę samą liczbę, to nowa n-tka będzie współrzędnymi tego samego punktu.

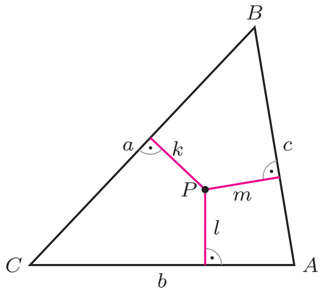
Traci się w ten sposób jednoznaczność współrzędnych danego punktu, ale zyskuje się to, że wszelkie sytuacje geometryczne będą opisywane wyłącznie funkcjami jednorodnymi. To wielka wygoda, bo okazuje się, że dla k naturalnych

Funkcja m zmiennych jest jednorodna w stopniu k, gdy spełnia warunek $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_m) = \lambda^k f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dla dowolnego λ i dowolnych $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ze swojej dziedziny; np. funkcja $x^\pi \sin(y/x) + y^\pi \sin(x/y)$ jest jednorodna w stopniu π. Funkcja jest gładka w stopniu k, gdy ma k ciągłych pochodnych.

funkcja jednorodna w stopniu k i gładka w stopniu k to zawsze wielomian.

Dowód tego faktu jest bardzo prosty (Euler), ale wymaga – rzecz jasna – użycia pojęcia pochodnej, więc go pominę.

Aby ten cel osiągnąć, Julius Plücker zaproponował współrzędne trójkątowe zwane też trójliniowymi.



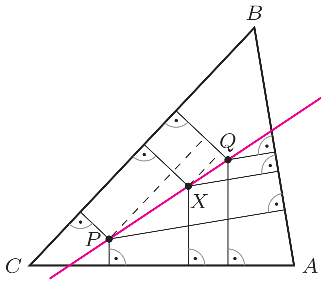
Rys. 1

Jak się łatwo domyślić, potrzebny jest w tym celu trójkąt, ale trójkąt, w którym dysponujemy całymi prostymi zawierającymi jego boki. Współrzędne punktu to będą odległości od tych prostych, przy czym odległość będziemy brali ze znakiem „+”, gdy punkt leży po tej samej stronie prostej, co nieleżący na niej wierzchołek trójkąta, i ze znakiem „−” w przeciwnym przypadku.

Jak widać, na rysunku 1 punkt P ma wszystkie współrzędne dodatnie. Takimi też będę się posługiwał, pozostawiając Czytelnikowi (łatwe) rozpatrzenie innych przypadków.

Oznaczmy pole trójkąta ABC przez $\frac{1}{2}\Delta$. Współrzędnymi P jest więc trójka (k, l, m). Zauważmy też, że

$$a \cdot k + b \cdot l + c \cdot m = \Delta.$$



Rys. 2

To proste spostrzeżenie pozwala potwierdzić, że współrzędne te są faktycznie jednorodne, bo jednostki miar długości czy pola możemy dobrać dowolnie.

Zaletą dodatkową współrzędnych trójkątowych jest to, iż proste mają w tych współrzędnych równania liniowe. Sprawdźmy to.

Niech współrzędnymi P będzie trójka (k, l, m), a współrzędnymi Q trójka (p, q, r). Znajdźmy warunek na to, by punkt X o współrzędnych (x, y, z) leżał na prostej PQ.

Z rysunku 2 mamy $\dfrac{x-k}{p-k} = \dfrac{PX}{PQ}$. Podobnie $\dfrac{y-l}{q-l} = \dfrac{PX}{PQ} = \dfrac{z-m}{r-m}$.

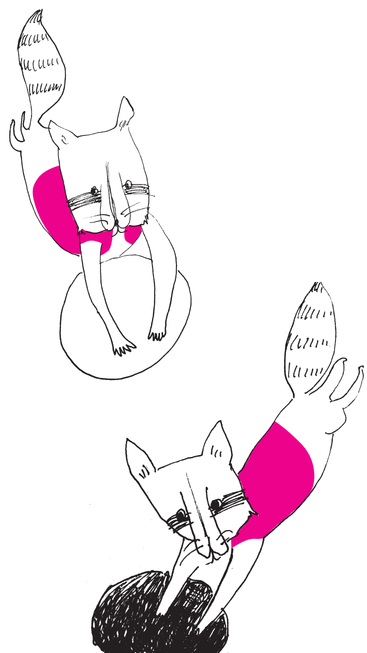
Teraz potrzebna nam będzie trójka (α, β, γ) spełniająca dwa warunki

$$\alpha \cdot k + \beta \cdot l + \gamma \cdot m = 0 \quad \text{i} \quad \alpha \cdot p + \beta \cdot q + \gamma \cdot r = 0.$$

Takie warunki użytkownicy algebry liniowej nazywają znikaniem iloczynu skalarnego, a poszukiwana trójka to dla nich iloczyn wektorowy. Nie trzeba jednak tych pojęć znać, by sprawdzić poprawność zgadniętej odpowiedzi.

Taką trójką jest $(\alpha, \beta, \gamma) = (lr - mq,\ mp - kr,\ kq - lp)$. Z udowodnionych wyżej proporcji mamy więc $\alpha(x-k) + \beta(y-l) + \gamma(z-m) = 0$, a na koniec $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ – i takie jest równanie prostej PQ.

Bardzo ładnie, ale co z tego za pożytek?



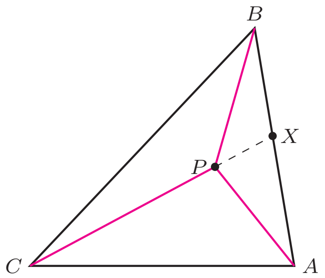
Aby go zobaczyć, trzeba spojrzeć na to oczyma kolegi Plückera (to nie żart: byli rówieśnikami i bliskimi znajomymi), Ferdinanda Möbiusa.

Möbius postanowił zamiast korzystać z boków trójkąta skorzystać z jego wierzchołków. Co więcej, odwołał się do fizyki, a konkretnie użył środków ciężkości. Już od czasów Archimedesa wiadomo, że grawitacja działa tak „w dół”, jak „do góry” (balony, statki na wodzie). Dlatego mamy do czynienia z ciężarami i wyporami, co w szkolnej fizyce prowadzi do pojęcia dźwigni jedno- bądź dwustronnej.

Gdy obciążymy dwa punkty A i B, to ich środek ciężkości może wypaść w dowolnym punkcie prostej AB. Dokładniej – obowiązuje zasada „ramię razy siła”, czyli gdy w punkcie A umieścimy ciężar/wypór m_A, a m_B w punkcie B, wówczas środek ciężkości będzie spełniał warunek $\overrightarrow{AS} \cdot m_A + \overrightarrow{BS} \cdot m_B = 0$. Możemy parę (m_A, m_B) uznać za współrzędne punktu S na prostej AB. Takie współrzędne Möbius nazwał współrzędnymi barycentrycznymi. Czytelnik zechce sprawdzić, że współrzędne punktów na poniższym rysunku

mogą być następujące: $P = (2, -1)$, $Q = (1, 3)$, $R = (-3, 5)$. Mogą, bo współrzędne barycentryczne są jednorodne – przecież obciążać punkty możemy równie dobrze w gramach, jak w tonach.

Aby wprowadzić współrzędne barycentryczne na płaszczyźnie, trzeba na niej wskazać odpowiednik zasady „ramię razy siła”. A oto i on
Jeśli środkiem ciężkości (A, m_A), (B, m_B), (C, m_C) jest punkt P, to $m_A : m_B : m_C = \Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP}$, gdzie Δ_{XYZ} to pole trójkąta XYZ.

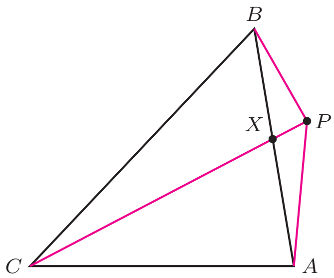


Rys. 3

Rzeczywiście, mamy bowiem (rys. 3)

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{XB}{AX} = \frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{AXC}} = \frac{\Delta_{BPX}}{\Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCX} - \Delta_{BPX}}{\Delta_{AXC} - \Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{APC}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{CAP}}.$$

Równość pozostałych stosunków uzasadniamy analogicznie.

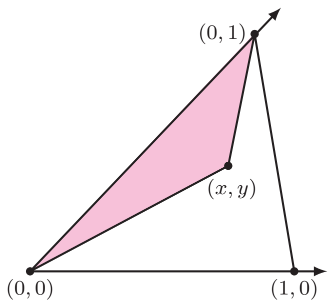


Rys.4

Kolejność wierzchołków przy „deltach” jest pomyślana tak, by rachunek przebiegał równie dobrze dla punktów leżących poza wnętrzem trójkąta ABC (rys. 4) – trzeba tylko zamienić pojęcie pola na pojęcie pola zorientowanego, czyli wyróżnić jeden sposób obiegania wierzchołków trójkąta (np. „zgodnie z ruchem wskazówek zegara”, czyli ruchem Słońca na naszym niebie) i uznać pola obiegane w ten sposób za dodatnie, a pozostałe za ujemne.

Teraz obciążenia wierzchołków trójkąta odpowiadające punktowi P możemy uznać za jego współrzędne barycentryczne.

I tu warto porównać rysunek 1 i 3 – przecież w obu zainteresowanie skoncentrowane jest na polach trójkątów APB, BPC, CPA. Po chwili zastanowienia dochodzimy do wniosku, że Plücker i Möbius wymyślili to samo, a tylko inaczej na to spojrzeli.



Rys. 5

Co więcej, wymyślone przez nich współrzędne są w doskonałej zgodności ze zwykłymi współrzędnymi kartezjańskimi. Uzasadnienie tego jest na rysunku 5.

Punkty A, B, C potraktujmy jak wyznaczające kartezjański układ współrzędnych punkty $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 0)$. Rozpatrzmy, jak trzeba obciążyć te punkty, by środek ciężkości wypadł w punkcie o kartezjańskich współrzędnych (x, y). Ze współrzędnych barycentrycznych tego punktu wybierzmy te, które sumują się do 1 (wystarczy podzielić każdą ze współrzędnych przez ich sumę – o ile jest niezerowa) – takie szczególne współrzędne nazywają się arealne. Czytelnik z łatwością zauważy, że obciążenie punktu $(1, 0)$ to właśnie będzie x. Podobnie $(0, 1)$ należy obciążyć ciężarem/wyporem y. No, a $(0, 0)$? Oczywiście, $1 - x - y$, bo to współrzędne arealne, czyli sumujące się do 1.

Dziś monografia Plückera *Analytisch-geometrische Entwicklungen* jest praktycznie zapomniana, natomiast dzieło Möbiusa *Der barycentrische Calcül* cieszy się znacznym szacunkiem. Powód jest niebagatelny, a da się pokazać już w przypadku współrzędnych na prostej: punktu o współrzędnych barycentrycznych $(1, -1)$ na prostej nie ma! Bo gdy znaki są różne, punkt leży poza odcinkiem AB z tej strony, z której wartość bezwzględna obciążenia jest większa (proszę porównać z rysunkiem na górze strony!), a tutaj...
Podobnie nie ma na płaszczyźnie punktów, których suma współrzędnych barycentrycznych znika.

I Möbius zaproponował, by płaszczyznę (prostą, przestrzeń) uzupełnić o te punkty. I tak wskazał, że jego współrzędne stosują się także w geometrii rzutowej (bo tak nazywają się pouzupełniane w ten sposób przestrzenie różnego wymiaru), a geometria rzutowa to, jak za Cayleyem mówią do dziś geometrzy, cała geometria.

O współrzędnych barycentrycznych można więcej przeczytać w moim artykule *Co mogą nam dać ciężary i wypory?*, Δ^3_{12}, a o geometrii rzutowej w *Dziewięć twarzy płaszczyzny rzutowej*, Δ^5_{13}.