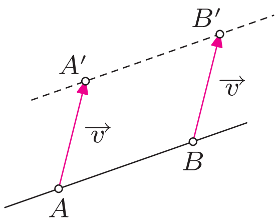
Przesuwanie w zadaniach olimpijskich

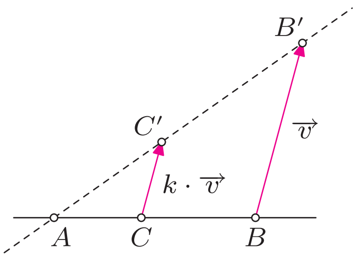
Michał KIEZA

W tym artykule omówimy pewną bardzo pożyteczną technikę – tzw. *przesuwanie*. Polega ona na tym, że niektóre obiekty przesuwamy o pewien wektor i udowadniamy, że teza zadania jest niezmiennicza ze względu na wykonanie tej operacji. Ta metoda pozwala na sprowadzenie rozwiązywanego zadania do znacznie prostszego. Bardzo często ten prostszy przypadek ma jakiś rodzaj symetrii, z której łatwo wywnioskować tezę. Zanim przejdziemy do rozwiązywania zadań, odnotujmy dwie proste własności opisanej operacji.

Własność 1. Jeśli punkty A i B przesuniemy o wektor $\overrightarrow{v}$, otrzymując punkty A' i B', to przesunięcie prostej AB o wektor $\overrightarrow{v}$ da nam w rezultacie prostą $A'B'$ (rys. 1).



Rys. 1



Rys. 2

Własność 2. Dane są punkty A i B oraz taki punkt C na prostej AB, że $\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{BA}} = k$. Jeśli punkt B przesuniemy o wektor $\overrightarrow{v}$, otrzymując punkt B', a punkt C' na prostej AB' spełnia $\frac{\overrightarrow{C'A}}{\overrightarrow{B'A}} = k$, to $\overrightarrow{CC'} = k \cdot \overrightarrow{v}$ (rys. 2).

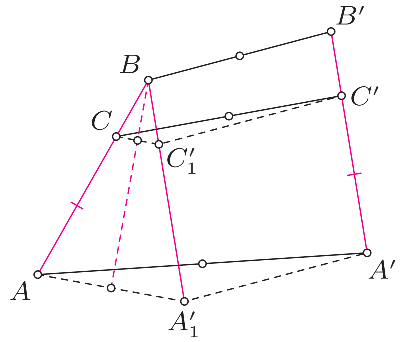
Łatwe dowody powyższych własności pozostawiamy Czytelnikowi. Zauważmy w szczególności, że z drugiej własności wynika, iż środek odcinka AB przesunie się o wektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$, zaś punkt symetryczny do B względem punktu A o wektor $-\overrightarrow{v}$.

Uzbrojeni w tytułową metodę i powyższe własności możemy przejść do rozwiązania kilku przykładów.

Przykład 1. (Twierdzenie Hjelmsleva) Dane są dwa odcinki AB i $A'B'$ jednakowej długości. Punkty C i C' leżą odpowiednio na odcinkach AB i $A'B'$, przy czym $AC = A'C'$. Udowodnić, że środki odcinków AA', BB' i CC' leżą na jednej prostej.

Rozwiązanie. Jeśli przesuniemy odcinek $A'B'$ o pewien wektor $\overrightarrow{v}$, to punkt C' także przesunie się o wektor v. Ponadto środki odcinków AA', BB' i CC' przesuną się o wektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$. Zatem operacja przesuwania nie wpływa na prawdziwość tezy.

Przesuńmy zatem odcinek $A'B'$ o wektor $\overrightarrow{B'B}$ (rys. 3). Obrazem punktu B' jest, oczywiście, punkt B, zaś niech A'_1 i C'_1 będą obrazami odpowiednio punktów A' i C'



Rys. 3

w tym przesunięciu. Wystarczy udowodnić, że punkt B oraz środki odcinków CC'_1 i AA'_1 są współliniowe. Jednakże z równości

$$AB = A'B' = A'_1B \quad \text{oraz} \quad AC = A'C' = A'_1C'_1$$

i twierdzenia Talesa wynika, że odcinki AA'_1 i CC'_1 są równoległe, a więc ich środki leżą na środkowej trójkąta AA'_1B.

Twierdzenie Hjelmsleva można również sprawnie udowodnić, powołując się na fakt istnienia *symetrii z poślizgiem* (czyli złożenia symetrii i przesunięcia), która przekształca punkty A, B, C odpowiednio na A', B', C'. Wystarczy zauważyć, że wspomniane w treści środki boków muszą leżeć na osi wykorzystanej symetrii.

Nietrudno zauważyć, że opisaną metodą można rozwiązać zadanie ogólniejsze.

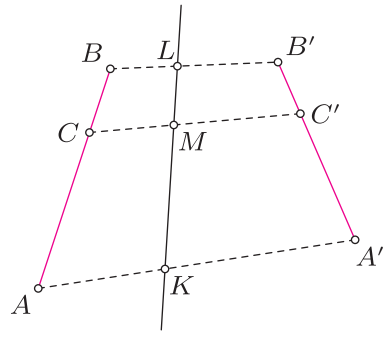
Dane są dwa odcinki AB i $A'B'$ (rys. 4). Punkty C i C' leżą odpowiednio na odcinkach AB i $A'B'$, przy czym

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}.$$

Niech K, L, M będą takimi punktami leżącymi odpowiednio na odcinkach AA', BB' i CC', że

$$\frac{AK}{A'K} = \frac{BL}{B'L} = \frac{CM}{C'M}.$$

Wykazać, że punkty K, L i M leżą na jednej prostej.



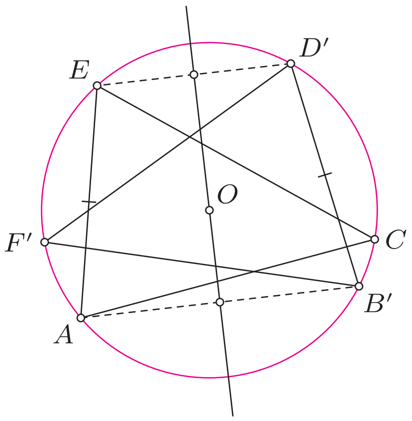
Rys. 4

Przejdźmy teraz do następnego przykładu.

Przykład 2. (III etap 57 OM) Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$, w którym $AC = DF$, $CE = FB$ oraz $EA = BD$. Dowieść, że proste łączące środki przeciwległych boków tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązanie. Zauważmy, że jeśli przesuniemy trójkąt BDF o wektor $\overrightarrow{v}$, to środki wszystkich boków sześciokąta $ABCDEF$ przesuną się o wektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$. W takim razie każda z rozważanych w treści zadania prostych przesunie się także o wektor $\frac{1}{2}\overrightarrow{v}$, więc teza zadania jest niezmiennicza ze względu na tę operację.

Skoro trójkąty ACE i BDF są przystające, to mają jednakowe okręgi opisane (rys. 5). Przesuńmy więc tak trójkąt BDF, aby rozważane okręgi pokryły się. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ACE, zaś $B'D'F'$ obrazem trójkąta BDF w tym przesunięciu. Wystarczy udowodnić, że każda z prostych łączących środki przeciwległych boków sześciokąta $AB'CD'EF'$ przechodzi przez punkt O.



Rys. 5

Skoro $AE = BD = B'D'$, to czworokąt $AB'D'E$ jest trapezem równoramiennym o podstawach AB' i $D'E$. Prosta łącząca środki boków AB' i $D'E$ jest jego osią symetrii, a więc na niej musi leżeć środek okręgu opisanego na tym trapezie, czyli punkt O. Analogicznie dowodzimy, że punkt O należy do dwóch pozostałych prostych łączących środki przeciwległych boków sześciokąta $AB'CD'EF'$.

W kolejnym przykładzie przekonamy się, że metoda przesuwania może być także skuteczna w zadaniach o polach.

Przykład 3. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ przeciwległe boki są równoległe. Udowodnić, że trójkąty ACE i BDF mają równe pola.

Rozwiązanie. Wykażemy najpierw, że przesuwanie trójkąta BCD o wektor $\overrightarrow{v}$ równoległy do boków AB i DE nie ma wpływu na prawdziwość tezy (rys. 6 i rys. 7). Niech bowiem h będzie odległością między prostymi AB i DE, zaś C_1 i F_1 takimi punktami odpowiednio na bokach AE i BD, że proste CC_1, FF_1 są równoległe do prostej AB. Wtedy przed przesunięciem mamy

$$\Delta ACE = \frac{1}{2}CC_1 \cdot h \quad \text{oraz} \quad \Delta BDF = \frac{1}{2}FF_1 \cdot h,$$

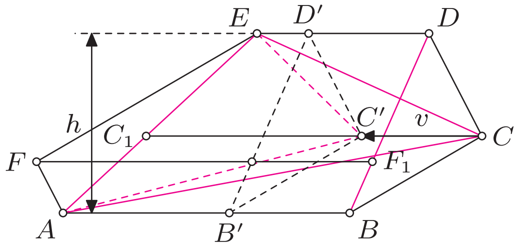
zaś po przesunięciu oba pola wynoszą odpowiednio

$$\frac{1}{2}(CC_1 \pm v) \cdot h \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}(FF_1 \pm v) \cdot h$$

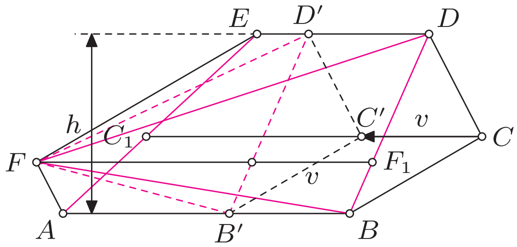
albo

$$\frac{1}{2}CC_1 \cdot h \pm \frac{1}{2}v \cdot h \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{2}FF_1 \cdot h \pm \frac{1}{2}v \cdot h.$$

Innymi słowy, podczas opisanej operacji oba pola zmieniają się o jednakową wielkość, a więc są równe przed przesunięciem wtedy i tylko wtedy, gdy są równe po przesunięciu.



Rys. 6



Rys. 7

Przyjmijmy bez straty dla ogólności, że $AB \geqslant DE$ i przesuńmy trójkąt BCD o wektor $\overrightarrow{DE}$, otrzymując w wyniku trójkąt $B'C'E$ (rys. 8). Wobec obserwacji poczynionej w pierwszym akapicie wystarczy udowodnić, że trójkąty $AC'E$ i $B'EF$ mają równe pola. Ponieważ przesunięcie zachowuje równoległość, to mamy

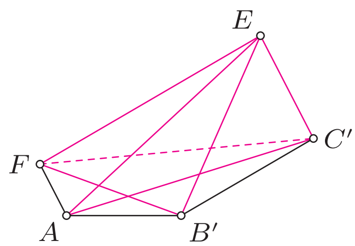
$$B'C' || BC || EF \quad \text{oraz} \quad C'E || DE || AF.$$

W takim razie

$$[AC'E] = [FC'E] = [B'EF].$$

Powyższe rozumowanie pozostaje, oczywiście, prawdziwe, gdy punkty A i B' pokrywają się.

Opisane rozwiązanie można dokończyć, inaczej wykonując jeszcze raz operacje z pierwszego akapitu rozwiązania, uzyskując trapez.



Rys. 8

Ostatni nasz przykład dotyczy sumy długości odcinków.

Przykład 4. (I etap 52 OM) Okrąg dzieli każdy bok rombu na 3 odcinki. Malujemy otrzymane odcinki kolejno na czerwono, zielono i biało, zaczynając od wierzchołka rombu i poruszając się po jego obwodzie w ustalonym kierunku. Wykazać, że suma długości odcinków czerwonych jest równa sumie długości odcinków białych.

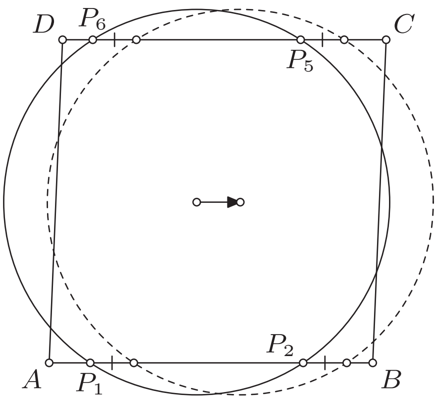
Rozwiązanie. Niech $ABCD$ będzie danym rombem. Oznaczmy przez P_1, P_2, …, P_8 kolejne punkty przecięcia danego okręgu z bokami rombu. Należy wykazać, że

$$AP_1 + BP_3 + CP_5 + DP_7 = BP_2 + CP_4 + DP_6 + AP_8$$

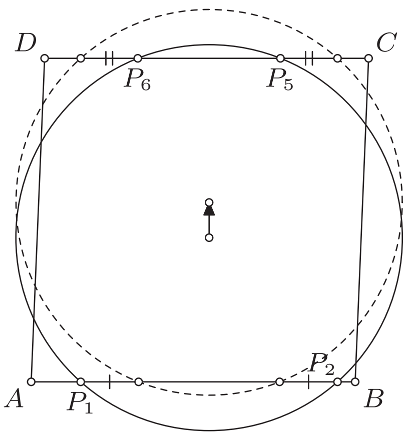
albo

$$AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6 = AP_8 + CP_4 - BP_3 - DP_7.$$

Jeśli przesuniemy dany okrąg o pewien wektor $\overrightarrow{v}$ równoległy do boku AB (rys. 9), to odcinki AP_1 i DP_6 wzrosną o v (albo zmaleją, jeśli zwrot był przeciwny do zwrotu wektora $\overrightarrow{AB}$), zaś odcinki BP_2 i CP_5 zmaleją o v (albo wzrosną, jeśli zwrot był przeciwny do zwrotu wektora $\overrightarrow{AB}$). W takim razie przy takiej operacji liczba $AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6$ nie zmienia się. Jeśli teraz przesuniemy dany okrąg o pewien wektor $\overrightarrow{v}$ prostopadły do boku AB (rys. 10), to odcinki AP_1 i BP_2 wzrosną o pewną wartość, zaś odcinki CP_5 i DP_6 zmaleją o pewną wartość (lub na odwrót w obu przypadkach, gdy zwrot wektora jest w kierunku AB). Zatem i w tym przypadku liczba $AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6$ nie zmieni się. Skoro dowolny wektor można przedstawić w postaci sumy wektora równoległego do AB i prostopadłego do AB, to przesuwanie danego okręgu nie zmienia wartości sumy $AP_1 + CP_5 - BP_2 - DP_6$. To samo dotyczy sumy $AP_8 + CP_4 - BP_3 - DP_7$.



Rys. 9



Rys. 10

Przesuńmy zatem tak dany okrąg, aby jego środek pokrył się ze środkiem danego rombu. Wobec poprzednich rozważań wystarczy dowieść tezy w tym przypadku. To jednak natychmiast wynika z symetrii problemu.

Na koniec przedstawiamy kilka zadań, które można rozwiązać opisaną metodą.

Zadania

1. (I etap 62 OM) W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD, zaś przekątne przecinają się w punkcie E. Wykazać, że prosta zawierająca dwusieczną kąta BEC jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BD$.

2. (APZM 2005) Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $BC = AD$. Na bokach BC i AD zbudowano na zewnątrz takie trójkąty BEC i AFD, że $BE = AF$ oraz $CE = DF$. Udowodnić, że środki odcinków AB, EF i CD leżą na jednej prostej.

3. Na płaszczyźnie dane są kwadraty $ABCD$ oraz $A'B'C'D'$, przeciwnie zorientowane o bokach odpowiednio długości a i b. Punkty K, L, M, N leżą odpowiednio na odcinkach AA', BB', CC', DD', przy czym

$$\frac{AK}{KA'} = \frac{BL}{LB'} = \frac{CM}{MC'} = \frac{DN}{ND'} = \frac{a}{b}.$$

Dowieść, że punkty K, L, M i N leżą na jednej prostej.

4. Częścią wspólną dwóch jednakowych kwadratów jest ośmiokąt. Boki jednego z kwadratów zostały narysowane na czerwono, drugiego zaś na niebiesko. Udowodnić, że suma długości czerwonych boków ośmiokąta jest równa sumie długości jego niebieskich boków.

5. Płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prostego o podstawie równoległoboku, tworząc w przekroju czworokąt wypukły $D_1D_2D_3D_4$. Niech d_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ będzie odległością punktu D_i od płaszczyzny ustalonej podstawy graniastosłupa. Udowodnić, że

$$d_1 + d_3 = d_2 + d_4.$$

6. (I etap 53 OM) Płaszczyzna przecina krawędzie boczne graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, tworząc w przekroju sześciokąt wypukły $D_1D_2 \ldots D_6$. Niech d_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ będzie odległością punktu D_i od płaszczyzny ustalonej podstawy graniastosłupa. Dowieść, że

$$d_1^2 + d_3^2 + d_5^2 = d_2^2 + d_4^2 + d_6^2.$$

Wskazówki

1. Przesuń punkty B i D o wektor $\overrightarrow{DC}$.

2. Przesuń wierzchołki trójkąta BCE o wektor $\overrightarrow{CD}$.

3. Przesuń wierzchołki kwadratu $A'B'C'D'$ tak, by punkt A' przeszedł na punkt A.

4. Przesuń jeden kwadrat tak, aby jego środek pokrył się ze środkiem drugiego kwadratu.

5. Wykaż, że czworokąt $D_1D_2D_3D_4$ jest równoległobokiem i przesuń go tak, aby jego środek pokrył się ze środkiem podstawy.

6. Udowodnij najpierw, że $d_1 + d_3 + d_5 = d_2 + d_4 + d_6$ (wykorzystaj poprzednie zadanie).