Koła, półkola i pola

Joanna JASZUŃSKA

1. Każdy z okręgów na rysunku 1 ma promień r i przechodzi przez środki obu pozostałych. Wyznacz pole kolorowego obszaru.

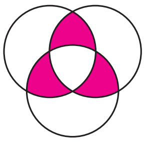
2. Dla każdego z rysunków 2 (a) i 2 (b) wykaż, że pole obszaru kolorowego równe jest polu obszaru szarego.

3. Średnicę koła o promieniu 1/2 podzielono na równe części i narysowano półokręgi jak na rysunku 3. Wykaż, że jednobarwne obszary mają równe pola i obwody.

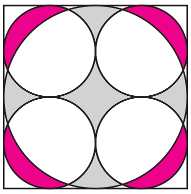
4. W dane półkole „wpisano” dwa kwadraty jak na rysunku 4. Dla jakiego położenia punktu B suma pól tych kwadratów jest największa?

5. Punkty A, B, C, D leżą w tej kolejności na jednej prostej, przy czym $AB = CD$. Narysowano półokręgi jak na rysunku 5, punkty E i F są środkami dwóch z nich. Wykaż, że pole szarego obszaru równe jest polu koła o średnicy EF.

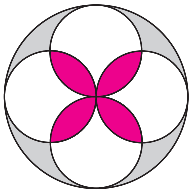
Inne zabawy z polami półkoli opisano w *deltoidzie* 8/2010.



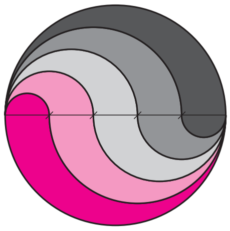
Rys. 1



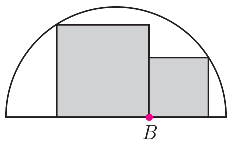
Rys. 2 (a)



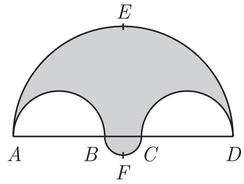
Rys. 2 (b)



Rys. 3



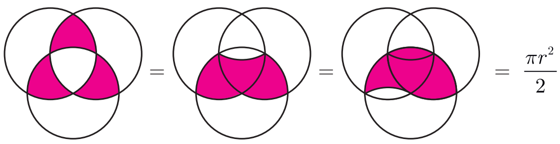
Rys. 4



Rys. 5

Rozwiązania

R1.



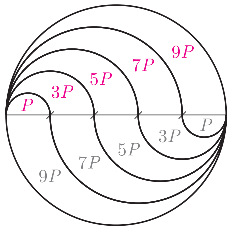
R2. (a) Dodajmy do każdego z obszarów (kolorowego i szarego) białe fragmenty małych kół. Kolorowy obszar uzupełnimy w ten sposób do pełnych czterech małych kół, szary zaś – do pełnego dużego koła. Ale $4\pi r^2 = \pi(2r)^2$, co kończy dowód. □

(b) Na mocy powyższej obserwacji, łączne pole czterech małych kół równe jest polu dużego koła. Wobec tego fragmenty dużego koła przykryte przez małe koła dwukrotnie (obszar kolorowy) mają pole równe fragmentom nieprzykrytym wcale (szary obszar). □

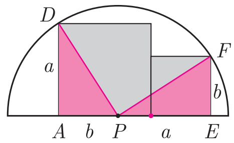
R3. Oznaczmy przez k liczbę części i przez P pole półkola o średnicy $1/k$. Wówczas pole półkola o średnicy n-krotnie większej równe jest n^2P. Ponadto różnica pól półkoli o średnicy $(n+1)$-krotnie większej i n-krotnie większej wynosi $((n+1)^2 - n^2)P = (2n+1)P$.

Pola poszczególnych części połowy danego koła są zatem kolejnymi nieparzystymi wielokrotnościami P (rys. 6), a pola jednobarwnych obszarów to kolejno P razy: $1 + (2k-1), 3 + (2k-3), 5 + (2k-5), \ldots, (2k-1) + 1$, czyli zawsze $P \cdot 2k$, a więc istotnie wszystkie są równe.

Obwód każdego z obszarów składa się z 3 lub 4 półokręgów o sumie średnic równej $1 + 1 = 2$. Półokrąg o średnicy 2 ma długość π; półokręgi o średnicach sumujących się do 2 również mają taką łączną długość. Stąd obwód każdego z rozważanych obszarów równy jest π, czyli obwodowi wyjściowego koła. □



Rys. 6

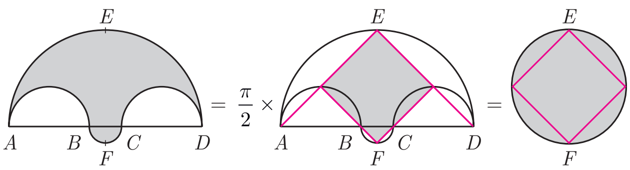


Rys. 7

R4. Oznaczmy wierzchołki oraz długości boków kwadratów jak na rysunku 7 i niech punkt P dzieli odcinek AE tak, że $AP = b$, $PE = a$. Na mocy twierdzenia Pitagorasa $PD^2 = a^2 + b^2 = PF^2$, czyli $PD = PF$. Punkt P leży więc nie tylko na średnicy półkola, ale też na symetralnej jego cięciwy DF, jest więc środkiem półkola.

Wobec tego suma pól kwadratów $a^2 + b^2$, jak już wiemy równa PD^2, równa jest kwadratowi promienia półkola, nie zależy więc od położenia punktu B. □

R5. Pole koła πr^2 to $\pi/2$ razy pole kwadratu weń wpisanego (równe $2r^2$). Zastąpmy więc każde z półkoli odpowiednią połówką kwadratu (rys. 8). Uzyskujemy w ten sposób kwadrat wpisany w koło o średnicy EF (szczegóły dowodu pozostawiam Czytelnikowi). □



Rys. 8. Dowód ten pochodzi od R.B. Nelsena, fakt zaś – od Archimedesa.