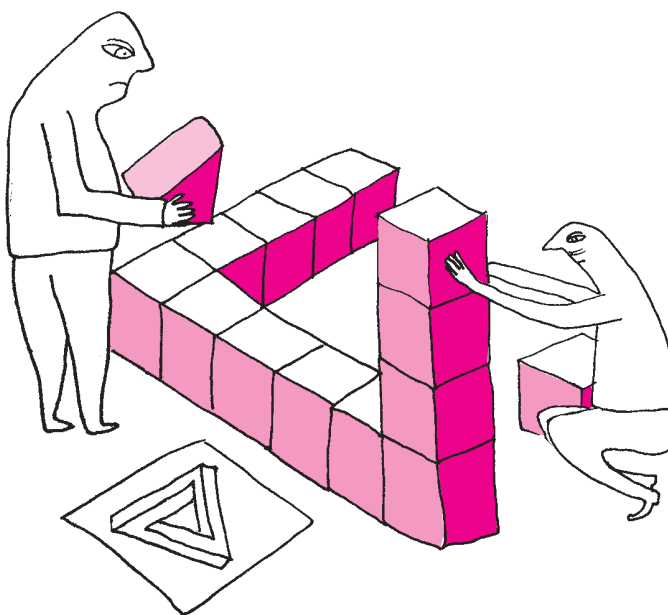


W następnym numerze: o niemożności.



SPIS TREŚCI NUMERU 9 (520)

Dlaczego niektóre łamigłówki są tak trudne?
Lukasz Grządko str. 1


Testy serii
Przemysław Grzegorzewski str. 4

Przerwy w liczbach pierwszych
Wojciech Czerwiński str. 8

Wyniki
XXXIV Ogólnopolskiego
Sejmiku Matematyków,
Szczyrk, 8–11 VI 2017 str. 10

Małe Wszechświaty str. 10

 Zadania str. 11


 Rekreacyjna lingwistyka
z matematyką
Andrzej Bartz str. 12

Combinatorial Nullstellensatz
w teorii liczb
Jacek Dymel str. 14

Migawka informatyczna:
Ciemna strona Internetu str. 16

Informatyczny kącik
olimpijski (107):
Palindromiczny podciąg
Kamil Dębowski str. 17

Aktualności str. 18

 Za górami są góry
Magdalena Fikus str. 19

Prosto z nieba: Pan Pieróg str. 20

Niebo we wrześniu str. 20

Klub 44 str. 22

SEM str. 24

 Łuki Talesa
Joanna Jaszuska str. 25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sek. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia;
rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA
Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Dlaczego niektóre łamigłówki są tak trudne?

*Nokia

Łukasz GRZĄDKO*

Inspiracją do napisania tego artykułu jest znana, popularna i – do czego chcę Czytelnika przekonać – całkiem niełatwa łamigłówka zwana Sudoku. Problem polega na uzupełnieniu częściowo wypełnionej planszy 9×9 w taki sposób, żeby każdy wiersz i każda kolumna oraz każdy z 9 tzw. regionów 3×3 zawierał wszystkie cyfry od 1 do 9. Czy nie przypomina to pewnego innego równie znanego problemu natury kombinatorycznej? Tak, to problem Uzupełniania Kwadratów Łacińskich, których wynalazcą był Leonhard Euler. Być może zainspirował innych, by w przyszłości stworzyli Sudoku. Zasady Uzupełniania (częściowo wypełnionych) Kwadratów Łacińskich są niemal identyczne jak w Sudoku, z tą drobną różnicą, że pomijamy wymaganie dotyczące regionów 3×3 . Gwoli uzupełnienia rysu historycznego dodajmy, że Sudoku zostało wymyślone przez Howarda Garnsa. Po raz pierwszy zostało opublikowane w 1979 r. przez magazyn *Dell Magazines*, a siedem lat później dotarło w końcu do Japonii, gdzie zdobyło dużą popularność, jak i swoje prawdziwe imię. Nazwa bowiem wzięła się z japońskiego wyrażenia „Suji wa dokushin ni kagiru” (数字は独身に限る), co dosłownie znaczy „Liczby muszą być pojedyncze”.

W wersji popularnej, w kontekście Sudoku, zawsze myślimy o planszy 9×9 . W wersji uogólnionej rozważamy siatkę złożoną z $n^2 \times n^2$ komórek, podzieloną na $n \times n$ regionów, każdy rozmiaru $n \times n$. Niektóre komórki na starcie wypełnione są liczbami naturalnymi z przedziału od 1 do n^2 . Celem jest wypełnienie pozostałych komórek tak, żeby każdy wiersz, każda kolumna oraz każdy region zawierał każdą z liczb z przedziału od 1 do n^2 dokładnie jeden raz. Podobnie możemy, oczywiście, rozważać problem Uzupełniania Kwadratów Łacińskich dla dowolnego n .

Okazuje się, że zarówno Uzupełnianie Kwadratów Łacińskich, jak i gra Sudoku są problemami NP-zupełnymi, a więc wierzymy, że bardzo trudnymi obliczeniowo. Pozostała część artykułu to właśnie próba naszkicowania, jak w ogóle można takie fakty dowodzić.

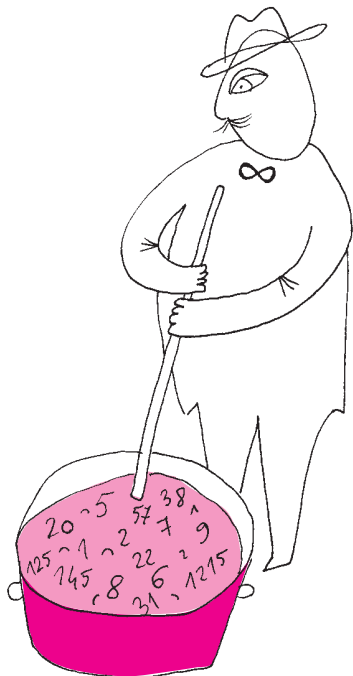
Otóż, aby udowodnić, że jakiś problem jest NP-pełny, wystarczy wziąć dowolny problem, o którym już wiemy, że jest NP-pełny i pokazać, że daje się go zredukować do naszego problemu. (Gwoli ścisłości w ten sposób tak naprawdę pokazujemy, że ten problem jest co najmniej tak trudny jak inne problemy NP-pełne. Należałoby jeszcze uzasadnić, że nie jest trudniejszy, co jest zwykle bardzo łatwe. Tutaj również, ale to pomijamy.) Zredukować, tzn. pokazać efektywną (wielomianową) konstrukcję, która przerabia dowolną instancję I_1 pierwszego problemu na instancję I_2 drugiego problemu, oczywiście z zachowaniem poprawności odpowiedzi (tzn: problem I_1 ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy I_2 ma rozwiązanie). Dokładnie tę metodę zaprezentujemy za chwilę. Na start weźmiemy problem 3SAT, o którym wiadomo, że jest NP-pełny, a następnie naszkicujemy ciąg redukcji:

3SAT \rightarrow TTP \rightarrow Uzupełnianie Kwadratów Łacińskich \rightarrow Sudoku.

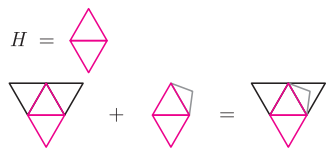
Do dzieła!

Redukcja: 3SAT \rightarrow TTP. Problem 3SAT to problem, który jest opisany przez długą koniunkcję klauzul, z których każda jest alternatywą trzech literalów (np. $(x_2 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_5)$). Pytamy, oczywiście, o spełnialność wejściowej formuły. Natomiast problem TTP (Triangulate Tripartite Problem) to problem triangulacji grafów trójdzielnych. Zanim przejdziemy do właściwej redukcji, potrzebujemy szeregu definicji.

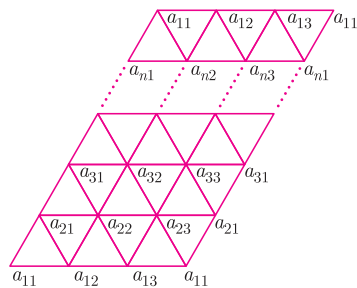
Graf *trójdzielny* to taki, którego wierzchołki można podzielić na trzy grupy w taki sposób, aby żadna krawędź nie łączyła wierzchołków z tej samej grupy. *Triangulacja* grafu to jego podział na rozłączne krawędziowo trójkąty. Rozważmy teraz dwa grafy G_1 i G_2 i przypuśćmy, że oba mają wspólny podgraf H . Możemy *skleić* G_1 z G_2 wzdłuż H . Zamiast definicji przedstawimy rysunek 1. Potrzebujemy jeszcze specjalnego grafu $H_{3,n}$, który pokazany jest na rysunku 2,



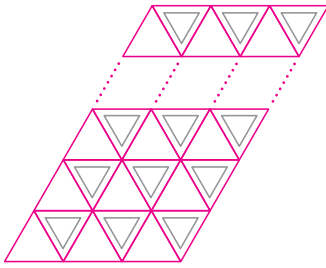
Jak łatwo zauważyć, sposób dowodzenia NP-zupełności przez redukcję ma sens, o ile już znamy jakiś problem NP-pełny. Pierwszym problemem, o którym bezpośrednio pokazano, że jest NP-pełny, był problem SAT (spełnialności formuł logicznych). Jest to treść słynnego twierdzenia Cooka z roku 1971, uważanego przez wielu za najważniejsze twierdzenie informatyki teoretycznej.



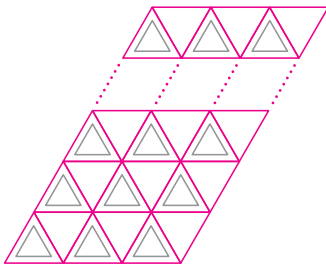
Rys. 1. Przykład sklejanego dwóch grafów wzdłuż grafu H



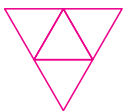
Rys. 2. Przykład grafu $H_{3,n}$. Wierzchołki na brzegach są tożsame.



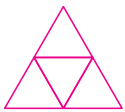
Rys. 3. Przykład F-triangulacji



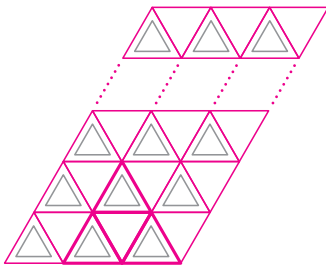
Rys. 4. Przykład T-triangulacji



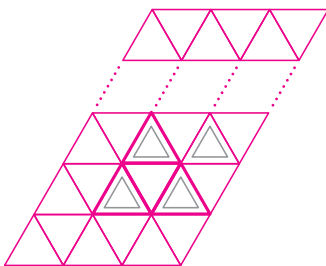
Rys. 5. Przykład T-płatka



Rys. 6. Przykład F-płatka



Rys. 7. T-triangulacja grafu H_3 oraz wyróżniony F-płatek



Rys. 8. Striangulowany graf z rysunku 7 sklejamy z powyższym grafem wzdłuż wyróżnionego F-płatka. Wymusza to T-triangulację całego grafu.

a który nie jest niczym innym jak tylko trójwymiarowym torusem zbudowanym z trójkątnej siatki.

Ten graf ma kilka interesujących własności. Przede wszystkim istnieją tylko dwie różne (dlaczego?) triangulacje grafu $H_{3,n}$, obie zilustrowane są na rysunkach 3 i 4. Tę triangulację, w której używamy trójkątów z czubkiem do góry, nazywamy T-triangulacją, a tę drugą – F-triangulacją. Pierwsza będzie odpowiadała wartości logicznej „prawda”, druga – „fałsz”. Graf $H_{3,n}$ jest grafem trójdzielnym, podobnie jak wszystkie rozważane sklejenia wielu jego kopii. Użytecznymi dla nas podgrafami grafu $H_{3,n}$ będą jeszcze F-płatek oraz T-płatek, zilustrowane na rysunkach 5 i 6.

Potrzebujemy jeszcze trzech lematów (ściśle dowody pomijamy, ale pomocne będą rysunki 7–12).

Lemat o płatkach zgodnych. Przypuśćmy, że mamy dwa grafy $H_{3,n}$ sklejone F-płatkami. Załóżmy, że znaleźliśmy triangulację wyniku tej operacji. Jest to możliwe wyłącznie wtedy, gdy albo oba grafy mają T-triangulację, albo jeden z nich ma T-triangulację, a drugi F-triangulację.

Lemat o płatkach niezgodnych. Tym razem przypuśćmy, że mamy dwa grafy $H_{3,n}$ połączone przez sklejenie T-płatka pierwszego grafu z F-płatkami drugiego grafu i znów całość została striangulowana. Jest to możliwe wyłącznie wtedy, gdy oba grafy mają każdą z trzech możliwych par konfiguracji triangulacji oprócz takiej, że pierwszy ma F-triangulację, a drugi T-triangulację.

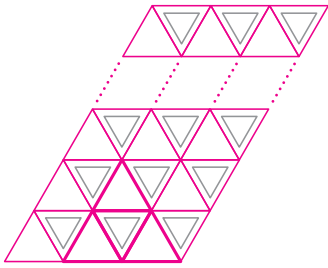
Lemat o wycięciu trójkąta. Przypuśćmy, że k grafów $H_{3,n}$ jest sklejonych wzdłuż T-płatka oraz usuwamy środkowy trójkąt typu F z części wspólnej tych grafów. Jest to możliwe wyłącznie wtedy, gdy dokładnie jeden graf ma F-triangulację, a pozostałe mają T-triangulację.

Jesteśmy wreszcie gotowi na właściwą redukcję.

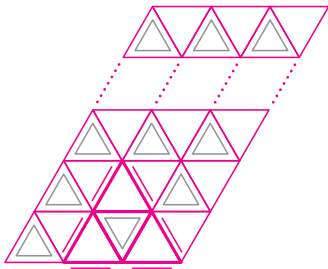
Rozważmy instancję problemu 3SAT, tj. zbiór klauzul $C = \{C_1, C_2, \dots, C_r\}$ oraz s zmiennych u_1, u_2, \dots, u_s , gdzie C_i składa się z literałów $l_{i,1}, l_{i,2}, l_{i,3}$. Wybieramy n tak duże, aby co najmniej $3r$ płatków nie kolidowało ze sobą w grafie $H_{3,n}$. Niech teraz kopia U_i grafu $H_{3,n}$ reprezentuje zmienną u_i , a kopie $C_{i,1}, C_{i,2}, C_{i,3}$ tego samego grafu reprezentują klauzulę C_i . Wszystkie te kopie sklejamy w pewien szczególny sposób. Jeśli $l_{i,j} = u_k$, to sklejamy znaleziony wolny F-płatek w $C_{i,j}$ z F-płatkami w U_k . W przeciwnym przypadku jeśli $l_{i,j} = \neg u_k$, wtedy sklejamy znaleziony wolny F-płatek w $C_{i,j}$ z T-płatkami w U_k . Ponadto łączymy grafy $C_{i,1}, C_{i,2}, C_{i,3}$ wzdłuż dowolnego wolnego F-płatka w każdym z grafów i usuwamy krawędzie centralnego trójkąta typu F. Efekt naszych działań oznaczymy jako G_3 . Pokażemy, że istnieje triangulacja grafu G_3 wtedy i tylko wtedy, gdy wejściowa formuła C jest spełnialna. To, oczywiście, zakończy dowód redukcji.

Przypuśćmy wprawdzie, że istnieje triangulacja grafu G_3 . Z poprzednich obserwacji jasno wynika, że każda ze składowych grafów ma triangulację T lub F.

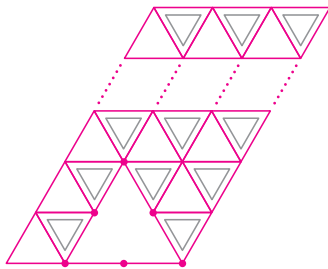
Przypuśćmy, że $l_{i,j} = u_k$ i rozważmy złączenie grafów $C_{i,j}$ i U_k . Twierdzimy, że krawędzie w sąsiedztwie złączenia mogą być triangulowane wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z grafów jest T-triangulowalny. Wynika to jednak wprost z lematu o płatku zgodnym. Podobnie jeśli $l_{i,j} = \neg u_k$, wtedy z lematu o płatku niezgodnym nie może jednocześnie $C_{i,j}$ być F-triangulowalny oraz U_k T-triangulowalny. Teraz rozważmy złączenie pomiędzy grafami $C_{i,1}, C_{i,2}, C_{i,3}$. Na podstawie lematu o wycięciu trójkąta wnioskujemy, że zbiór krawędzi w sąsiedztwie złączenia jest triangulowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dokładnie jeden z grafów $C_{i,1}, C_{i,2}, C_{i,3}$ jest F-triangulowalny. Stąd wynika, że jeśli G_3 jest triangulowalny, to istnieje wartościowanie u_1, u_2, \dots, u_s , które spełnia C , mianowicie u_k ma wartość prawdziwą wtedy i tylko wtedy, gdy U_k jest T-triangulowalny. W drugą stronę: jeśli C jest spełnialna, wtedy dzielimy G_3 przez podzielenie U_k względem wartości zmiennej u_k , wybierając dla każdej



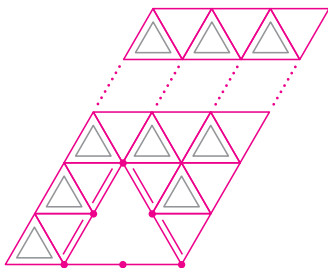
Rys. 9. F-triangulacja grafu $H_{3,n}$ oraz wyróżniony F-płatek



Rys. 10. Striangulowany graf z rysunku 9 sklejamy z powyższym grafem wzdłuż wyróżnionego F-płatka. Wymusza to T-triangulację pozostałej części powyższego grafu.



Rys. 11. F-triangulacja grafu $H_{3,n}$ oraz wyróżniony płatek z wyciętym trójkątem



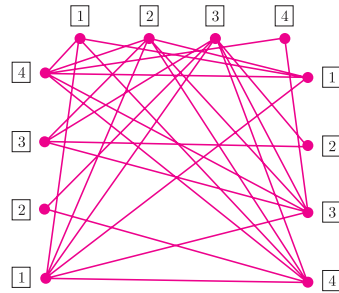
Rys. 12. Striangulowany graf z rysunku 11 sklejamy z powyższym grafem wzdłuż wyróżnionego płatka. Wymusza to T-triangulację pozostałej części powyższego grafu.

klauzuli takie $l_{i,j}$, które jest prawdziwe. Wtedy odpowiedni graf $C_{i,j}$ dzielimy według F-triangulacji, a pozostałe dwa są T-triangulowalne.

Konkretny przykład tej (przynajmy, dość zawilej) redukcji znajduje się na tylnej okładce. Pozostałe redukcje tylko zarysujemy.

Redukcja: TTP \rightarrow Uzupełnianie Kwadratów Łacińskich

Formalny opis redukcji i dowód (niestety, dość skomplikowany technicznie – potrzeba twierdzenia Halla o małżeństwach i algorytmu Hopcrofta–Karpa szukania maksymalnych skojarzeń w grafach dwudzielnych) Czytelnik Zainteresowany Szczegółami znajdzie w [1]. My pokażemy tylko poniższy przykład.



			6	2	5	7	8
8	5		7	1	2	3	6
5			8	4	1	6	7
		8		6	7	2	5
2	6	1	4	7	8	5	3
3	2	7	1	5	6	8	4
6	7	5	2	8	3	4	1
7	8	6	5	3	4	1	2

Zagadka 1. Podziel graf na rozłączne trójkąty.

Zagadka 2. Uzupełnij planszę do pełnego Kwadratu Łacińskiego.

Mam nadzieję, że *widać*, jak rozwiązanie zagadki z prawej strony przekłada się na rozwiązanie zagadki z lewej strony: jeśli liczbę S wpisemy do pustego miejsca w wierszu R w kolumnie C w zagadce prawej, to interpretujemy to jako zaznaczenie trójkąta o wierzchołkach: R z lewej, C na górze i S z prawej, w zagadce lewej.

Redukcja: Uzupełnianie Kwadratów Łacińskich \rightarrow Sudoku

Ponownie ograniczymy się do przykładu. Tym razem nie z powodu trudności technicznych, tylko dokładnie odwrotnie – wierzymy, że przykład wyjaśni wszystko. Wszystkie liczby są podane w systemie trójkowym, gdyż powinno to ułatwić zrozumienie redukcji. Problem Kwadratu jest tak „przerobiony”, aby wymusić własność, że w rozwiązaniu Sudoku wszystkie nowo wpisane liczby mają zero na pozycji jedności. Bardziej znacząca cyfra bezpośrednio koduje liczbę z Kwadratu.

0		
	1	
		2

Zagadka 3. Uzupełnij planszę do pełnego Kwadratu Łacińskiego.

00	01	02		11	12		21	22
	11	12	10	21	22		01	02
	21	22		01	02	20	11	12
01	02	10	11	12	20	21	22	00
11	12	20	21	22	00	01	02	10
21	22	00	01	02	10	11	12	20
02	10	11	12	20	21	22	00	01
12	20	21	22	00	01	02	10	11
22	00	01	02	10	11	12	20	21

Zagadka 4. Rozwiąż podane Sudoku 9×9 .

[1] Charles Colbourn, *The Complexity of Completing Partial Latin Squares*, Discrete Applied Mathematics 8 (1984).

Posłowie. Z natury rzeczy w tekście powyżej musiały się znaleźć pewne uproszczenia. Przede wszystkim, warto podkreślić, że samo pojęcie NP-zupełności nie może dotyczyć ani pojedynczego problemu, ani skończonej klasy problemów. Problemy NP-zupełne dotyczą zawsze pewnego nieskończonego ciągu problemów, które zwykle są coraz większe (stąd zresztą w tekście mowa o uogólnionym Sudoku czy o uogólnionym problemie Uzupełniania Kwadratów Łacińskich). Oznacza to, że powyższy szkic wcale nie tłumaczy wprost, dlaczego akurat łamigłówka Sudoku rozmiaru 9×9 jest trudna. Tak naprawdę możemy tylko powiedzieć, że łamigłówki Sudoku $n^2 \times n^2$ są *asymptotycznie* bardzo trudne (o ile, oczywiście, $P \neq NP$). Niemniej pozwala to przypuszczać, że również początkowe łamigłówki całego ciągu są trudne.

T. K.

Testy serii

Przemysław GRZEGORZEWSKI*

W języku potocznym spotykamy się czasem ze słowem *seria*, które może oznaczać zbiór jednakowych lub w pewien sposób powiązanych ze sobą przedmiotów, jak np. seria znaczków pocztowych czy seria wyrobów przemysłowych. Serią nazywamy również ciąg następujących po sobie czynności lub zdarzeń – w tym sensie rozumie się tzw. *czarną serię* wypadków, serię wystrzałów itp. Pojęcie serii okazuje się być przydatne także w matematyce. Zanim przedstawimy ciekawe zastosowania serii do konstrukcji użytecznych testów statystycznych, uściślijmy, co będziemy rozumieć pod pojęciem serii.

Załóżmy, że mamy n obiektów dwojakiego rodzaju, w tym $n_1 \geq 1$ obiektów pierwszego oraz $n_2 \geq 1$ obiektów drugiego rodzaju, przy czym $n_1 + n_2 = n$. Przyjmijmy ponadto, że jesteśmy w stanie w jakiś sposób uporządkować te obiekty. Odtąd natura owych obiektów nie będzie mieć już dla nas znaczenia. Nie będziemy ich też rozróżniać, pamiętając jedynie to, jakiego są one rodzaju. W ten sposób otrzymujemy pewien ciąg symboli, np.:

$N, N, N, N, N, F, N, F, N, N, N, F, N, F, N, N, N, N, N, F, F.$

Powyższy ciąg odzwierciedla wyniki pojedynków tenisowych między Rogerem Federerem i Rafaeliem Nadalem (w turniejach wielkoszlemowych, ATP i Pucharu Davisa) w ciągu ostatnich dziewięciu lat, przy czym symbole F i N oznaczają, odpowiednio, zwycięstwo Federera i Nadala.

Mając taki ciąg symboli, **serią** nazywamy podciąg symboli tego samego rodzaju, który poprzedza i po którym występuje symbol innego rodzaju (lub żaden symbol, w przypadku pierwszej i ostatniej serii). Łatwo zauważyć, że w rozważanym powyżej ciągu mamy 10 serii:

$\underbrace{N, N, N, N, N}_{1}, \underbrace{F}_{2}, \underbrace{N, F, N, N, N}_{3}, \underbrace{F}_{4}, \underbrace{N, F, N, N, N, N, N}_{5}, \underbrace{F, F}_{6}.$

Okazuje się, że liczba serii występujących w badanym ciągu obiektów dostarcza informacji, które mogą być przydatne we wnioskowaniu statystycznym, co wykażemy, przedstawiając konstrukcję dwóch testów i ilustrując ich działanie na przykładach.

Rozpocznijmy od testu równości dwóch rozkładów. Załóżmy, że mamy dwie niezależne próbki losowe X_1, \dots, X_{n_1} i Y_1, \dots, Y_{n_2} składające się z niezależnych obserwacji. Interesuje nas, czy rozkłady, z których pochodzą te próbki, różnią się istotnie. Zakładając, że wśród obserwacji nie ma powtarzających się wartości, możemy ustawić je w ciąg rosnący. Jeśli teraz pominiemy wartości obserwacji, a pozostawimy tylko etykiety, wskazujące, czy dany pomiar związany był z pierwszą czy z drugą próbką, otrzymamy ciąg n symboli złożony z iksów i igreków, gdzie $n = n_1 + n_2$. Przykładowo, dla $n_1 = 5$ oraz $n_2 = 4$, moglibyśmy otrzymać

(1) $Y, X, Y, X, X, Y, Y, X, X,$

co oznaczałoby, że najmniejsza obserwacja należy do próbki igreków, druga co do wielkości – do iksów itd., aż po największą obserwację, która także pochodzi z pierwszej próbki. Zauważmy, że to, jak rozłożą się iksy i igreki, może nam sporo powiedzieć na temat rozkładów obu próbek. Faktycznie, gdybyśmy otrzymali

(2) $X, X, X, X, X, Y, Y, Y, Y,$

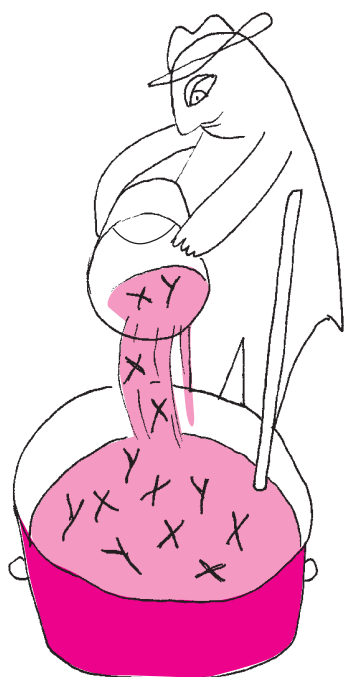
byłby to sygnał sugerujący, że iksy są zasadniczo mniejsze niż igreki. Z kolei następująca konfiguracja

(3) $Y, Y, X, X, X, X, X, Y, Y$

wskazywałaby, że igreki pochodzą z rozkładu charakteryzującego się większym rozrzutem niż rozkład iksów. Natomiast ciąg postaci

$X, Y, X, Y, X, Y, X, Y, X$

świadczyłby o dobrym wymieszaniu obserwacji obu próbek. Ostatni przykład, w przeciwieństwie do dwóch poprzednich, mógłby sugerować, że obie próbki pochodzą z tego samego rozkładu. Zauważmy, że w tym ostatnim ciągu występuje aż 9 serii, podczas gdy w ciągach (2) i (3) mieliśmy,



**Rozwiązanie zadania M 1540.**

Rozważmy dowolny podział zbioru dodatnich liczb całkowitych spełniający zadane warunki. Zauważmy, że jeżeli $1 \in B$, to dla dowolnego $a \in A$ mamy $a = a \cdot 1 \in B$, co jest sprzeczne z założeniem, że zbiory A i B są rozłączne. Wobec tego $1 \in A$.

Oznaczmy przez n najmniejszy element zbioru B . Korzystając z pierwszego z danych warunków, łatwo indukcyjnie udowodnić, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej k :

$\{1, 2, \dots, n-1\} + \{n, 2n, \dots, kn\} \subseteq A$, skąd wniosek, że wszystkie liczby niepodzielne przez n należą do zbioru A . W szczególności z drugiego z danych warunków wynika, że każda liczba podzielna przez n , ale niepodzielna przez n^2 , należy do zbioru B .

Przypuśćmy, że $kn^2 \in A$ dla pewnej dodatniej liczby całkowitej k . Wówczas, skoro $n \in B$, to $kn^2 + n = n(kn + 1) \in A$, co jest sprzeczne z konkluzją poprzedniego akapitu. To oznacza, że wszystkie liczby podzielne przez n należą do zbioru B .

Pozostaje zauważyć, że dla każdego $n > 1$ jeżeli A jest zbiorem liczb niepodzielnych przez n , a B — zbiorem liczb podzielnych przez n , to warunki zadania są spełnione.

**Rozwiązanie zadania M 1541.**

Dla $i = 1, 2, 3$ oznaczmy przez O_i środek sfery s_i , a przez C_i — punkt styczności sfery s_i ze sferą s . Ponieważ $\sphericalangle AC_iB = 90^\circ$ oraz punkty A, C_i, O_i są współliniowe, więc również $\sphericalangle O_iC_iB = 90^\circ$.

Rozważmy inwersję względem sfery s_B o środku B i promieniu BC . Dla $i = 1, 2, 3$ sfera s_i jest prostopadła do sfery s_B , więc jest zachowywana przy rozważanej inwersji. Tę samą własność ma sfera s_A . Wobec tego obrazem sfery s (przechodzącej przez środek inwersji) jest pewna płaszczyzna, która jest styczna do s_1, s_2, s_3, s_A .

**Rozwiązanie zadania M 1542.**

Wystarczy udowodnić, że nierówność

$$\frac{1}{2} \pm x + x^2 \pm x^3 + x^4 \pm \dots \pm x^{2n-1} + x^{2n} > 0$$

zachodzi dla każdego spośród 2^{2n} możliwych wyborów znaków.

Rzeczywiście, lewą stronę powyższej nierówności można zapisać w postaci

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (x^{2k} \pm 2x^{2k+1} + x^{2k+2}) + \frac{1}{2} x^{2n} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (x^k \pm x^{k+1})^2 + \frac{1}{2} (x^n)^2,$$

co jest liczbą nieujemną jako suma kwadratów liczb rzeczywistych. Pozostaje zauważyć, że liczba ta jest ściśle dodatnia, gdyż równości $x^n = 0$ oraz $x^k = \mp x^{k+1}$ (dla $k = 0, 1, \dots, n-1$ i pewnych wyborów znaków \mp) nie mogą wszystkie zachodzić jednocześnie.

odpowiednio, tylko 2 i 3 serie. Biorąc pod uwagę wspomniane wyżej interpretacje poszczególnych ciągów, możemy wysnuć przypuszczenie, że gdy w ciągu otrzymanym z połączenia obu próbek jest mało serii, to wskazuje to raczej na istotne różnice między rozkładami obu próbek, podczas gdy duża liczba serii może sugerować, że obie próbki pochodzą *de facto* z tego samego rozkładu. Tego typu spostrzeżenia nasunęły Abrahamowi Waldowi i Jakubowi Wolfowitzowi pomysł konstrukcji następującego testu statystycznego: jeśli liczba serii występujących w ciągu otrzymanym z połączonych próbek jest mała, to odrzucamy hipotezę mówiącą o braku różnic między rozkładami, natomiast w przeciwnym przypadku, tzn. gdy liczba serii jest duża, nie mamy podstaw do odrzucenia rozważanej hipotezy, co w praktyce oznacza stwierdzenie braku istotnej różnicy między rozkładami.

W tym miejscu konieczne jest poczynienie pewnych uwag. Po pierwsze, musimy być świadomi, że nawet gdyby obie próbki pochodziły z tego samego rozkładu, możliwe jest otrzymanie konfiguracji zawierającej małą liczbę serii, a więc np. tego typu, jak w (2) i (3). Na szczęście, jak się okazuje, jest to mało prawdopodobne. Druga uwaga dotyczy interpretacji słów *duża* bądź *mała* liczba serii. Co to, tak naprawdę, znaczy? Owszem, w rozważanym przykładzie maksymalna możliwa liczba serii wynosi 9, ale czy liczba serii równa 6, jak w przypadku (1), oznacza już *dużą* czy wciąż jeszcze *małą* liczbę serii? Do odpowiedzi na to pytanie posłużmy nam rachunek prawdopodobieństwa.

Niech R oznacza liczbę serii występujących w rozważanym ciągu symboli. Oczywiście, liczba serii nie może być mniejsza niż liczba różnych symboli w ciągu, a zarazem większa niż łączna liczba obserwacji w obu próbkach, tzn. $2 \leq R \leq n$. Jako kryterium rozdziałające *małą* i *dużą* liczbę serii przyjmijmy pewną wartość krytyczną k_α , czyli taką największą liczbę całkowitą, dla której — przy założeniu prawdziwości testowanej hipotezy (o braku różnic między rozkładami obu próbek) — zachodzi

$$\mathbb{P}(R \leq k_\alpha) \leq \alpha,$$

gdzie α jest tzw. poziomem istotności, czyli przyjętym z góry ograniczeniem na prawdopodobieństwo odrzucenia hipotezy, gdy faktycznie jest ona prawdziwa (zwykajowo przyjmowaną wartością poziomu istotności jest 0,05).

Innymi słowy, policzywszy, ile serii R występuje w ciągu utworzonym z połączonych próbek oraz dysponując wartością krytyczną k_α , nasz test równości rozkładów wygląda następująco:

- jeśli $R \leq k_\alpha$, wówczas odrzucamy hipotezę o równości rozkładów,
- jeśli $R > k_\alpha$, to nie mamy podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy.

Pozostaje nam teraz wskazać metodę wyznaczania wartości krytycznych k_α . Pomocne będą w tym dwa twierdzenia.

Twierdzenie 1. Niech R_1 i R_2 oznaczają, odpowiednio, liczbę serii obiektów pierwszego i drugiego rodzaju w ciągu utworzonym przez n_1 obiektów pierwszego rodzaju i n_2 obiektów drugiego rodzaju. Wówczas, przy założeniu równości rozkładów obu próbek, zachodzi

$$(4) \quad \mathbb{P}(R_1 = r_1, R_2 = r_2) = \frac{c \binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2-1}{r_2-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}},$$

gdzie $r_1 = 1, \dots, n_1$, $r_2 = 1, \dots, n_2$, przy czym $r_1 = r_2$ lub $r_1 = r_2 \pm 1$ oraz $c = 2$, gdy $r_1 = r_2$, zaś $c = 1$, gdy $r_1 = r_2 \pm 1$.

Dowód. Zakładając równość rozkładów obu próbek, wszystkie możliwe układy n_1 elementów pierwszego rodzaju i n_2 elementów drugiego rodzaju są tak samo prawdopodobne. Takich rozróżnialnych układów jest $\binom{n_1+n_2}{n_1}$, zatem mamy już mianownik wyrażenia (4). Aby otrzymać licznik, zauważmy, że liczba różnych sposobów otrzymania r_1 serii z n_1 obiektów pierwszego typu wynosi $\binom{n_1-1}{r_1-1}$. Łatwo to dostrzec, wyobrażając sobie, że mamy rozmieścić n_1 białych kul w r_1 komórkach w ten sposób, aby w każdej komórce znalazła się przynajmniej jedna kula. Można to zrealizować, na przykład, tak, że między ustawione w linii białe kule wstawi się $r_1 - 1$ przegród. Ponieważ mamy $n_1 - 1$ możliwych miejsc, w które można wstawić przegrodę, otrzymujemy owe $\binom{n_1-1}{r_1-1}$ potencjalnych układów.

X Y X Y X Y



To samo rozumowanie można, oczywiście, powtórzyć wobec n_2 obiektów drugiego rodzaju, które tworzą r_2 serii. Wobec tego łączna liczba rozróżnialnych układów, zaczynająca się serią obiektów pierwszego rodzaju, wynosi $\binom{n_1-1}{r_1-1} \binom{n_2-1}{r_2-1}$. Tyle samo układów otrzymamy, gdy ciąg serii rozpoczyna seria obiektów drugiego rodzaju. Ponieważ zaś serie obiektów pierwszego i drugiego rodzaju muszą występować na przemian, w konsekwencji musi zachodzić $r_1 = r_2 \pm 1$ albo $r_1 = r_2$. Jeśli zachodzi $r_1 = r_2 - 1$, to ciąg serii rozpoczyna seria obiektów drugiego rodzaju. Gdy $r_1 = r_2 + 1$, to jako pierwsza występuje seria obiektów pierwszego rodzaju. Natomiast w sytuacji, gdy $r_1 = r_2$, jako pierwsza w ciągu może pojawić się zarówno seria pierwszego, jak i drugiego rodzaju, co sprawia, że liczbę rozróżnialnych układów należy podwoić. W ten sposób otrzymujemy licznik wyrażenia (4), co kończy dowód. \square

Twierdzenie 2. Przy założeniu równości rozkładów obu próbek rozkład łącznej liczby serii R , w ciągu utworzonym przez n_1 obiektów pierwszego rodzaju i n_2 obiektów drugiego rodzaju, jest dany wzorem

$$(5) \quad \mathbb{P}(R = r) = \frac{2 \binom{n_1-1}{r/2-1} \binom{n_2-1}{r/2-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}},$$

gdy r jest parzyste oraz

$$(6) \quad \mathbb{P}(R = r) = \frac{\binom{n_1-1}{(r-1)/2} \binom{n_2-1}{(r-3)/2} + \binom{n_1-1}{(r-3)/2} \binom{n_2-1}{(r-1)/2}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}},$$

gdy r jest nieparzyste. Wzory te są prawdziwe dla $2 \leq r \leq n_1 + n_2$.

Dowód. Powyższe twierdzenie wynika bezpośrednio z twierdzenia 1. Istotnie, jeśli r jest parzyste, to liczba serii obu rodzajów obiektów musi być taka sama, tzn. $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$, co po podstawieniu do wzoru (4) daje (5). Natomiast, gdy r jest nieparzyste, wówczas $r_1 = r_2 \pm 1 = \frac{r \pm 1}{2}$ i sumując oba te przypadki, na mocy (4) otrzymujemy (6). \square

Jak można wykorzystać powyższe wyniki we wnioskowaniu statystycznym? Wyobraźmy sobie, na przykład, że w pewnym supermarkecie postanowiono zbadać, czy istnieje związek między ceną produktów chemicznych a czasem, jaki klient poświęca, oglądając dany produkt, zanim podejmie decyzję o zakupie. W tym celu zarejestrowano długość czasu, przez jaki klienci oglądali jeden z dwóch środków czyszczących, sprzedawanych w opakowaniach o tej samej pojemności, ale różniących się ceną. Losowo wybrane wyniki zawiera poniższa tabela.

Produkt	Czas (w sekundach)							
droższy	7,24	9,79	11,23	13,11	22,82	23,47	32,69	33,04
	48,96	53,53	58,46	60,36				
tańszy	8,02	16,31	17,56	19,36	20,93	21,39	27,92	29,16
	31,08	31,78	33,94	35,8	39,04	42,92	46,79	

Ustawmy wszystkie pomiary w ciąg rosnący, pamiętając przy tym, do której grupy cenowej należy każdy z nich. Jeśli teraz pominiemy wartości pomiarów, a pozostawimy tylko etykiety wskazujące, czy dany pomiar związany był z produktem droższym (ozn. D), czy tańszym (ozn. T), otrzymamy następujący ciąg symboli:

D, T, D, D, D, T, T, T, T, D, D, T, T, T, T, D, D, T, T, T, T, D, D, D, D.

Jak widać, ciąg ten zawiera 9 serii. Korzystając z twierdzenia 2, możemy łatwo obliczyć prawdopodobieństwa możliwych wartości liczby serii w 27-elementowym ciągu otrzymanym z $n_1 = 12$ elementów pierwszego rodzaju i $n_2 = 15$ elementów drugiego rodzaju – przybliżone wyniki znajdują się na marginesie (zachęcam Czytelnika do skontrolowania choćby kilku z nich).

- $\mathbb{P}(R = 2) \approx 0,000000115,$
- $\mathbb{P}(R = 3) \approx 0,00000144,$
- $\mathbb{P}(R = 4) \approx 0,0000177,$
- $\mathbb{P}(R = 5) \approx 0,000102,$
- $\mathbb{P}(R = 6) \approx 0,000576,$
- $\mathbb{P}(R = 7) \approx 0,00202,$
- $\mathbb{P}(R = 8) \approx 0,0069,$
- $\mathbb{P}(R = 9) \approx 0,01641,$
- $\mathbb{P}(R = 10) \approx 0,038.$

Sumując wartości obliczonych prawdopodobieństw, dostaniemy $\mathbb{P}(R \leq 9) = 0,026$ oraz $\mathbb{P}(R \leq 10) = 0,064$, z czego wynika, że np. dla poziomu istotności $\alpha = 0,05$ wartość krytyczna testu wynosi $k_{0,05} = 9$. A ponieważ w przeprowadzonym doświadczeniu otrzymaliśmy 9 serii, na mocy opisanej powyżej reguły decyzyjnej odrzucamy hipotezę o równości rozkładów. Zatem rozkłady odpowiadające

**Rozwiązanie zadania F 935.**

Powierzchnię bańki mydlanej tworzą dwie powierzchnie rozdziału faz woda z mydłem – powietrze, pomiędzy którymi znajduje się roztwór wody z mydłem. Zakrzywiona powierzchnia bańki o promieniu r powoduje, że w jej wnętrzu ciśnienie jest większe od zewnętrznego o $4\sigma/r$, gdzie r jest promieniem bańki. Zamknięty w bańce gaz spełnia prawo Boyle’a–Mariotte’a, $pV = nRT$, gdzie p jest ciśnieniem gazu, V jego objętością, n liczbą moli gazu, R stałą gazową, a T temperaturą w skali bezwzględnej. Oczywiście $n = m/\mu$, gdzie m oznacza masę gazu, a μ jego masę molową. Masa gazu zamkniętego w bańkach przed i po zderzeniu nie zmienia się, nie zmienia się też temperatura T . Biorąc to wszystko pod uwagę, otrzymujemy równanie spełniane przez promień r_1 końcowej bańki:

$$2 \left(p_0 + \frac{4\sigma}{r_0} \right) r_0^3 = \left(p_0 + \frac{4\sigma}{r_1} \right) r_1^3,$$

a stąd

$$\frac{r_1^3 - 2r_0^3}{2r_0^2 - r_1^2} = \frac{4\sigma}{p_0}.$$

Dla spełnienia warunku dodatniości prawej strony musi zachodzić

$$\sqrt{2}r_0 > r_1 > \sqrt[3]{2}r_0.$$

Ponieważ $4\sigma/p_0 \approx 10^{-6}$ m, to r_1 bardzo nieznacznie przewyższa $\sqrt[3]{2}r_0$.

**Rozwiązanie zadania F 936.**

Na podstawie zasady równowagi masy i energii otrzymujemy, że kwant γ o częstotliwości ν i energii $h\nu$, gdzie h jest stałą Plancka, spadając w polu grawitacyjnym z wysokości H zwiększy swoją energię o $h\nu gH/c^2$, a więc jego częstotliwość wzrośnie o $\Delta\nu = \nu gH/c^2$. Dla niewielkich prędkości u ruchu emitera zmiana częstotliwości promieniowania w wyniku zjawiska Dopplera wynosi $\Delta\nu/\nu = u/c$. Dla skompensowania wzrostu energii kwantu γ podczas spadku emitery musi oddalać się od detektora z prędkością powodującą zmniejszenie energii kwantu o wartość równą temu wzrostowi. Otrzymujemy więc: $u \approx gH/c \approx 7,5 \cdot 10^{-7}$ m/s. W doświadczeniu Pounda i Rebki użyto kwantów γ o energii 14,4 keV emitowanych przez izotop ^{57}Fe (*Physical Review Letters* 4, 337 (1960)).

badanym produktom różnią się, co oznacza, że istnieje związek między ceną produktów chemicznych a czasem, jaki klient poświęca, oglądając dany produkt, zanim podejmie decyzję o jego zakupie.

Test równości rozkładów nie jest jedynym interesującym testem wykorzystującym pojęcie serii. Innym ciekawym narzędziem statystycznym jest **test losowości**.

Wyobraźmy sobie, że obserwujemy wchodzących do kina, notując płeć kolejnych osób. Załóżmy, że ostatnie 10 osób wygenerowało następujący ciąg: $K, K, K, K, K, M, M, M, M, M$ gdzie symbole K i M oznaczają, odpowiednio, kobietę i mężczyznę. Tego typu ciąg trudno byłoby uznać za losowy, gdyż odpowiadałby on sytuacji, w której do kina wchodzi najpierw kobiety, a potem mężczyźni. Równie mało losowy byłby ciąg $M, M, M, M, M, K, K, K, K, K$. W obu przypadkach ciągi zawierałyby jedynie po dwie serie. A zatem mała liczba serii wskazywałaby na duże zgrupowanie podobnych obiektów, co kłóciłoby się z losowością. Zwróćmy jednak uwagę, iż diametralnie inny ciąg: $K, M, K, M, K, M, K, M, K, M$, byłoby równie trudno uznać za losowy. Sugerowałby on bowiem, iż do kina wchodziły pary. Tak więc tym razem duża liczba serii (w rozważanym ciągu jest ich 10) także wskazywałaby na brak losowości, jakkolwiek innej natury, niż to miało miejsce w poprzednich przykładach.

Naturalne pytanie, jakie nasuwa się w tym miejscu, brzmi zatem: *Kiedy dany ciąg możemy uznać za losowy?* Na tak postawione pytanie łatwiej odpowiedzieć przez dopełnienie, określając, kiedy ciąg nie jest losowy. Mianowicie, powszechnie przyjmuje się, że *ciąg jest nielosowy, jeśli tworzy jakąś strukturę*. Takie określenie interesującego nas pojęcia może nie wszystkich zadowala, ale jest dość intuicyjne. O ile jednak stosunkowo łatwo analizować w tym kontekście ciągi krótkie i wyraźnie ustrukturyzowane, jak choćby te wskazane powyżej, do badania losowości dowolnych ciągów przydają się rozmaite metody statystyczne. Należy do nich również test losowości wykorzystujący liczbę serii. Tym razem jednak, w przeciwieństwie do omawianego wcześniej testu równości dwóch rozkładów, odrzucamy hipotezę o losowości, jeśli liczba serii jest zarówno zbyt mała, jak i zbyt duża. A to oznacza, że do podjęcia decyzji potrzebne są dwie wartości krytyczne: dolna d_α i górna g_α . Wyznaczamy je ze wzorów podanych w twierdzeniu 2, przy czym d_α oznacza taką największą liczbę całkowitą, dla której – przy założeniu prawdziwości testowanej hipotezy o losowości – zachodzi

$$\mathbb{P}(R \leq d_\alpha) \leq \frac{\alpha}{2},$$

natomiast g_α oznacza taką najmniejszą liczbę całkowitą, dla której – przy założeniu prawdziwości testowanej hipotezy o losowości – zachodzi

$$\mathbb{P}(R \geq g_\alpha) \leq \frac{\alpha}{2},$$

gdzie α jest przyjętym poziomem istotności.

Dysponując tak wyznaczonymi wartościami krytycznymi oraz policzywszy, ile serii R występuje w badanym ciągu, nasz test losowości przebiega następująco:

- jeśli $R \leq d_\alpha$ lub $R \geq g_\alpha$, wówczas odrzucamy hipotezę o losowości ciągu obserwacji,
- jeśli $d_\alpha < R < g_\alpha$, to nie mamy podstaw do odrzucenia weryfikowanej hipotezy.

Zachęcamy Czytelników, aby spróbowali zbadać, czy ciąg wyników meczów rozegranych przez Federera i Nadala, od którego rozpoczęliśmy nasze rozważania, jest losowy.

Wspomnijmy jeszcze tylko, że oprócz liczby serii ciekawe może być również to, jak długie są poszczególne serie, jaki jest rozmiar najdłuższej serii, itd. Tego typu informacje mogą także okazać się przydatne do testowania losowości.

Na zakończenie podkreślmy jeszcze jedną, niezwykle ważną cechę omawianych testów serii, jaką jest ich *nieparametryczność*. Pojęcie to nieco lepiej oddaje język angielski poprzez określenie *distribution-free*, oznaczające procedurę, która nie zależy od rozkładu badanej próbki. W statystyce jest to bardzo pożądana własność, otwierająca szerokie pole do potencjalnych zastosowań danej procedury, wolnej od rozmaitych, często kłopotliwych ograniczeń.

Przerwy w liczbach pierwszych

Wojciech CZERWIŃSKI

Wielu Czytelników słyszało zapewne o twierdzeniu Czebyszewa, mówiącym, że dla każdej liczby naturalnej n w przedziale $(n, 2n]$ istnieje jakaś liczba pierwsza. Jednak już jego dowód nie jest tak znany. A szkoda, bo jest niebywale elegancki i daje się prześledzić bez wiedzy spoza zakresu liceum. Poniższy tekst jest oparty na rozdziale książki *Dowody z księgi* autorstwa Martina Aignera i Güntera M. Zieglera.

Najpierw trochę historii. W 1845 roku Joseph Bertrand sformułował hipotezę twierzącą, że „odległość od najbliższej liczby pierwszej nie może być większa niż liczba, od której zaczynamy poszukiwania”. Dlatego też niekiedy omawiane twierdzenie nazywane jest hipotezą Bertranda. Sam Bertrand udowodnił swoją hipotezę dla liczb $n < 3000000$. W 1850 roku Pafnutij Czebyszew znalazł pierwszy pełny dowód dla wszystkich liczb naturalnych. My przedstawimy dowód autorstwa słynnego Paula Erdösa, który publikując go w 1932 roku, miał zaledwie 19 lat.

Najpierw wykażemy prawdziwość twierdzenia dla liczb $n < 4000$. Zauważmy, że nie musimy sprawdzać wszystkich przypadków, a wystarczy jedynie wskazać ciąg liczb pierwszych, z których każda jest mniejsza niż dwukrotność poprzedniej. Przykładowy taki ciąg to

2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631, 1259, 2503, 4001.

Zajmijmy się więc dowodem dla $n \geq 4000$. W tym celu będziemy przyglądać się liczbie $\binom{2n}{n}$. Oszacujemy ją z dołu i z góry. Następnie okaże się, że przy założeniu, że nie ma żadnych liczb pierwszych w przedziale $(n, 2n]$, dojdziemy do sprzeczności.

Wykażmy na początek dosyć proste oszacowanie dolne. Dla dowolnego $n \geq 1$ zachodzi

$$(1) \quad \frac{4^n}{2n} \leq \binom{2n}{n}.$$

Jest tak, gdyż $4^n = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$, a wartość $\binom{2n}{n}$ jest największą spośród $2n$ liczb:

$$\binom{2n}{0} + \binom{2n}{2n}, \binom{2n}{1}, \binom{2n}{2}, \dots, \binom{2n}{2n-1}.$$

Przejdziemy teraz do oszacowania górnego, które otrzymamy w kilku krokach. Pierwsze oszacowanie, które będzie nam pomocne za moment, jest samo w sobie bardzo interesujące. Pokażemy, że

$$(2) \quad \prod_{p \in P(1, n)} p \leq 4^{n-1},$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, gdzie $P(i, j]$ to zbiór zawierający wszystkie liczby pierwsze w przedziale $(i, j]$. Zauważmy najpierw, że wystarczy udowodnić ten fakt tylko dla liczb pierwszych. Wówczas niech q będzie największą liczbą pierwszą nie większą niż n . Dostajemy

$$\prod_{p \in P(1, n)} p = \prod_{p \in P(1, q]} p \leq 4^{q-1} \leq 4^{n-1}.$$

Udowodnimy więc (2) przez indukcję. Dla $n = 2$ mamy $2 \leq 4$, więc jest to prawda. Aby wykonać krok indukcyjny, założymy, że nierówność (2) jest prawdziwa dla wszystkich liczb pierwszych mniejszych od liczby pierwszej $q = 2m + 1$. Mamy

$$\prod_{p \in P(1, 2m+1]} p = \prod_{p \in P(1, m+1]} p \cdot \prod_{p \in P(m+1, 2m+1]} p \leq 4^m \cdot \binom{2m+1}{m} \leq 4^m 2^{2m} = 4^{2m}.$$

Nierówność

$$\prod_{p \in P(1, m+1]} p \leq 4^m$$





wynika z założenia indukcyjnego. Nierówność

$$\prod_{p \in P(m+2, 2m+1)} p \leq \binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)!}{m!(m+1)!}$$

natomiast wynika z tego, że wszystkie liczby pierwsze w $P(m+1, 2m+1]$ dzielą licznik $(2m+1)!$, ale nie dzielą mianownika $n!(n+1)!$. Ostatnia nierówność $\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m}$ wynika zaś z tego, że $\sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} = 2^{2m+1}$ oraz dwa z tych wyrazów to $\binom{2m+1}{m}$ i $\binom{2m+1}{m+1} = \binom{2m+1}{m}$.

Przypomnijmy teraz twierdzenie Legendre'a, mówiące, że w rozkładzie liczby $n!$ na czynniki pierwsze liczba pierwsza p pojawia się dokładnie $\sum_{k \geq 1} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ razy.

Łatwo je udowodnić, zauważając, że w iloczynie $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ dokładnie $\frac{n}{p}$ liczb jest podzielnych przez p , dokładnie $\frac{n}{p^2}$ jest podzielnych przez p^2 , itd.

Przypomnijmy też, że $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$. Z twierdzenia Legendre'a łatwo wywnioskować, że dowolna liczba pierwsza dzieli $\frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$ w potęgę dokładnie

$$\sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right).$$

Dla dowolnych liczb $a, b \in \mathbb{N}$ liczba $\lfloor \frac{2a}{b} \rfloor - 2 \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ jest równa albo 0, albo 1. Dodatkowo dla $p^k > 2n$ wartości $\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor$ oraz $2 \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ są równe zero. Zatem otrzymujemy, że liczba pierwsza p dzieli $\binom{2n}{n}$ w potęgę dokładnie

$$(3) \quad \sum_{k \geq 1} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \leq \sum_{k \geq 1, p^k \leq 2n} 1 = \max\{r \mid p^r \leq 2n\}.$$

Możemy więc przejść do właściwego oszacowania. Będziemy się zastanawiać, ile razy różne liczby pierwsze występują w rozkładzie $\binom{2n}{n}$ na czynniki pierwsze. Zauważmy najpierw, że z (3) wynika, iż dla dowolnego $p \in P(1, n]$ potęga r jest taka, że $p^r \leq 2n$. A więc w szczególności liczby pierwsze $p > \sqrt{2n}$ występują tam co najwyżej jeden raz. Istotne jest spostrzeżenie, że liczby pierwsze p spełniające $\frac{2}{3}n < p \leq n$ wcale nie dzielą $n!$. Jest tak, gdyż dzielą zarówno licznik $(2n)!$, jak i mianownik $n! \cdot n!$ w potęgę równej dwa. Otrzymujemy więc

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \in P(1, \sqrt{2n})} 2n \cdot \prod_{p \in P(\sqrt{2n}, \frac{2}{3}n]} p \cdot \prod_{p \in P(n, 2n]} p.$$

W połączeniu z (1) mamy

$$(4) \quad \frac{4^n}{2n} \leq \prod_{p \in P(1, \sqrt{2n})} 2n \cdot \prod_{p \in P(\sqrt{2n}, \frac{2}{3}n]} p \cdot \prod_{p \in P(n, 2n]} p.$$

Przypuśćmy teraz, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ zbiór $P(n, 2n]$ jest pusty. Wówczas z (4) wynika, że

$$\frac{4^n}{2n} \leq \prod_{p \in P(1, \sqrt{2n})} 2n \cdot \prod_{p \in P(\sqrt{2n}, \frac{2}{3}n]} p \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2}{3}n},$$

gdzie druga nierówność wynika z (2). Przekształcając, otrzymujemy

$$4^n \leq (2n)^{\sqrt{2n}+1} \cdot 4^{\frac{2}{3}n}$$

oraz

$$(5) \quad 4^{\frac{1}{3}n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}+1},$$

co, jak zaraz wykażemy, nie jest prawdą dla $n \geq 4000$.

Korzystając z nierówności $k+1 \leq 2^k$ prawdziwej dla $k \geq 2$, mamy

$$(6) \quad 2n = (\sqrt[6]{2n})^6 < (\sqrt[6]{2n} + 1)^6 < 2^6 \sqrt[6]{2n}.$$

Dla liczb $n \geq 50$ dostajemy

$$2^{2n} \leq (2n)^{3(1+\sqrt{2n})} < 2^{6\sqrt[6]{2n}3(1+\sqrt{2n})} = 2^{18\sqrt[6]{2n}(1+\sqrt{2n})} < 2^{20\sqrt[6]{2n}\sqrt{2}} = 2^{20(2n)^{\frac{3}{2}}},$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z (5), następna z (6), a ostatnia z faktu, że $18 < 2\sqrt{2n}$ dla $n \geq 50$. Mamy więc $2^{2n} < 2^{20(2n)^{\frac{3}{2}}}$, czyli $2n < 20(2n)^{\frac{3}{2}}$, czyli $(2n)^{\frac{1}{2}} < 20$, czyli $n < 4000$. A zatem zbiór $P(n, 2n]$ nie może być pusty dla liczb $n \geq 4000$, co kończy dowód twierdzenia Czebyszewa.

Wyniki XXXIV Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Szczyrk, 8–11 VI 2017

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych (wraz z bibliografią) przez Jury lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym referowaniu tego opracowania.

Jury w składzie: dr hab. Mieczysław Kula – przewodniczący, dr Anna Bień, dr Paweł Błaszczak, dr Anna Brzeska, dr Łukasz Dawidowski, mgr Żywilla Fechner, dr Paweł Gładki, dr Piotr Kalemba, dr Maria Kania-Błaszczak, dr Renata Kawa, dr Marian Podhorodyński, dr Barbara Przebieracz, dr Małgorzata Serwecińska, dr Jolanta Sobera, dr Anna Szczerba-Zubek, **postanowiło przyznać następujące wyróżnienia:**

I miejsce: Wojciech Kretowicz – I LO w Bydgoszczy za pracę *Podzielność silni a suma cyfr*, opiekun: mgr Mariusz Adamczak;

II miejsce: Kacper Bem – VIII LO w Poznaniu za pracę *O węzłach słów kilka*, opiekun: mgr Joanna Politarczyk, dr Wojciech Politarczyk oraz **Mateusz Matczak** – II LO w Zduńskiej Woli za pracę *Nierówności izoperymetryczne*, opiekun: dr inż. Renata Długosz, dr Krzysztof Pieszyński;

III miejsce: Patryk Matusiak – VIII LO w Poznaniu za pracę *Liczby Ramseya*, opiekun: mgr Joanna Politarczyk oraz **Gabriela Pietras** – Publiczna Szkoła Podst. w Leszczynie, za pracę *Kolorowanie szachownic*, opiekun mgr Martha Łącka.

W głosowaniu publiczności na najlepszą prezentację **nauczyciele nagrodzili Grzegorza Janosza** – I LO w Pszczynie, praca *Problemy problemów*, oraz **Wojciecha Kretowicza**, a **uczniowie Tymoteusza Ciesielskiego** – LO w Pszczynie, praca *Racjonalny, ale czy najlepszy?* oraz **Wojciecha Kretowicza**.

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; www.spinor.edu.pl

Małe Wszechświaty

Przesunięcia o naturalne wielokrotności danego wektora v tworzą jednostajnie nieciągłą podgrupę izometrii: odrzucają każdy punkt co najmniej o $|v|$.

Podzielenie płaszczyzny przez grupę z powyższego przykładu daje powierzchnię walca. Można to sobie wyobrazić w ten sposób: na przezroczystej folii rysujemy w jednakowych odstępach równoległe proste odległe o $|v|$, a następnie zwijamy folię tak, by widzieć tylko jedną prostą.

Natomiast grupy astrofizyków wybierają dla siebie któryś z Małych Wszechświatów i piszą prace o tym, co by było, gdyby tak było; np. *Wszechświat w lazience*, *Delta* 1/2013.

T_v to przesunięcie o wektor v , a $R_{v,k,\alpha}$ to ruch śrubowy, czyli złożenie przesunięcia o wektor v z obrotem względem prostej k (równoległej do v) o kąt α ; patrz *Rzut butem...*, *Delta* 11/2015.

Astrofizycy ostatnio twierdzą, że „Wszechświat jest płaski”, co w ich żargonie oznacza, iż średnia krzywizna Wszechświata jest równa zeru (i tylko lokalnie jest zakłócana przez grawitację). Jeśli mają rację, to matematyka dowodzi, że Wszechświat przyjmuje jeden z 18 możliwych kształtów.

Wynika to z twierdzenia Felixa Kleina, które głosi, że **wszystkie lokalnie euklidesowe rozmaitości powstają z przestrzeni euklidesowej przez podzielenie jej przez jednostajnie nieciągłe podgrupy izometrii**. Wyjaśnijmy te terminy (rzecz jasna od końca).

Izometrie to przekształcenia zachowujące odległości. Grupa przekształceń to taki ich zbiór, w którym jest identyfikacja, wraz z każdym przekształceniem jest odwrotne do niego, a wraz z każdym dwoma – ich złożenie. Podgrupa izometrii jest jednostajnie nieciągła, gdy każde z jej przekształceń odrzuca każdy niestały punkt co najmniej na z góry ustaloną odległość.

Podzielenie przez grupę polega na utożsamieniu (sklejeniu) tych wszystkich punktów, które dadzą się nałożyć przez któreś z przekształceń grupy.

Jeśli chcemy, by nasz model Wszechświata był ograniczony (czyli, by odległości w nim nie przekraczały jakiejś wielkości, np. 5 mld lat razy prędkość światła) i był orientowalny (patrz np. *Co zobaczyła Alicja...*, *Delta* 5/2017), to liczba możliwości maleje do sześciu. Te właśnie modele nazywa się Małymi Wszechświatami – chwilowo nie potrafimy stwierdzić, czy Wszechświat „wybrał” któryś z nich.

Grupy określające te rozmaitości są wyznaczone, odpowiednio, przez przekształcenia T_v, T_w, T_u (v, w, u nie leżą w jednej płaszczyźnie); $T_v, T_w, R_{u,k,\pi}$ ($v \perp u \perp w$); $T_v, T_w, R_{u,k,\pi/2}$ ($|v| = |w|$, $v \perp u \perp w$, $\angle vw = \pi/2$); $T_v, T_w, R_{u,k,\pi/3}$ (jak poprzednio, tylko $\angle vw = \pi/3$); $T_v, T_w, R_{u,k,\pi}$ (jak poprzednio, tylko $\angle vw = 2\pi/3$); $R_{v,k,\pi}, R_{w,l,\pi}$ ($v \perp w$, k i l skośne).

Ten pierwszy Mały Wszechświat powstaje z równoległościannu, w którym zlepiła się przednia ściana z tylną, lewa z prawą i górna z dolną. Wyobrażenie pozostałych pozostawiam Czytelnikom.

M. K.

Człowiek, który poznał nieskończoność Roberta Kanigela

Nie będę ukrywał. Jestem zawsze niezmiernie sceptyczny, gdy podchodzę do książek o matematykach, napisanych przez nie-matematyków. Tak więc, gdy trafiła w moje ręce książka Roberta Kanigela pt. *Człowiek, który poznał nieskończoność*, reklamowana jako świetna biografia Srinivasy Ramanujana, to od razu sprawdziłem, kim jest autor. Odkryte pewne związki z matematyką (trzy lata studiów inżynierskich) Kanigela nie były dla mnie wystarczające. Jeszcze na dodatek wydawnictwo „Świat Książki” postanowiło książkę ubrać nie tylko w kiczowatą okładkę, ale jeszcze dodatkowo oszpecić ją tandetnymi cytatami z superpozytywnych recenzji znalezionymi w amerykańskich gazetach i czasopismach.

A jednak! Książkę przeczytałem niemal jednym tchem, cały czas pozostając pod jej ogromnym wrażeniem. Mimo to wciąż mam ambiwalentne odczucia, co o tej książce Czytelnikowi *Delty* napisać. Wydaje mi się, że potrafię wyartykułować swoje emocje następująco: jest to pozycja absolutnie znakomita, ale nie jest to bynajmniej opowieść o matematyce! Ba, nie jest to nawet opowieść o matematyku *per se*. Jest to raczej opowieść o życiu pewnego bardzo intrygującego człowieka pokazana na tle bardzo ciekawego

świata. I jedno i drugie Kanigel odmalowuje po prostu wspaniale. W jednej książce możemy znaleźć całą gamę pasjonujących obrazów: Zjednoczone Królestwo na Starym Kontynencie, Anglicy w Indiach, religia, Hardy, Littlewood, pasja, kultura Wschodu, poświęcenie, kobieta w kulturze hinduskiej, życie zawodowego matematyka w Cambridge przed wojną (to *se ne vrati*)... O wszystkim rzeczowo i zajmująco.

O ile same przykłady z matematyki (dość liczne) są już nie takie fantastyczne, to i one nie są (jak się niestety czasem zdarza w podobnych publikacjach) jakoś bardzo rażące (choć błędy, jak i zachwyty nad rzeczami trywialnymi się zdarzają). Natomiast to, co wyszło Kanigelowi chyba najlepiej, to próba pokazania, jak ten genialny Hindus mógł myśleć i patrzeć na świat. Dużo jest o duchowości, o wstydzie, o życiu na granicy szaleństwa, ale i o istocie matematyki. Autor próbuje (i wciąż w to Czytelnika) zastanawiać się, czy Ramanujan w ogóle widział potrzebę dowodzenia swoich śmiałych hipotez, skoro przecież to nie on je formułował, a tylko wsluchiwał się w głos bogini, która oczywiście nie może się mylić... A może po prostu nie zrozumiał do końca na czym taki formalny dowód polega? Zachęcam wszystkich, aby przyjrzeni się tym i innym pytaniom, które Kanigel stawia.

T.K.



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1540. Znaleźć wszystkie takie przedstawienia zbioru dodatnich liczb całkowitych w postaci sumy niepustych rozłącznych zbiorów A i B , że $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\} \subseteq A$ oraz $A \cdot B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\} \subseteq B$.
Rozwiązanie na str. 5

M 1541. Trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C obrócono wokół prostej AB , otrzymując dwa stożki obrotowe o wspólnej podstawie, której brzegiem jest okrąg c . Sfera s , do której należy punkt B , jest styczna do sfery s_A o środku A i promieniu AC . Sfery s_1, s_2, s_3 są styczne do sfery s oraz do sfery s_A w pewnych punktach należących do okręgu c . Udowodnić, że sfery s_A, s_1, s_2, s_3 mają wspólną płaszczyznę styczną.
Rozwiązanie na str. 5

M 1542. Wykazać, że dla każdej liczby rzeczywistej x oraz dla każdej dodatniej liczby całkowitej n istnieje co najmniej 2^n różnych wyborów znaków $+$ i $-$ w wyrażeniu $\pm x^{2^n} \pm x^{2^{n-1}} \pm \dots \pm x^2 \pm x < \frac{1}{2}$, dla których ta nierówność jest spełniona.
Rozwiązanie na str. 5

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 935. W wyniku zderzenia dwóch identycznych baniek mydlanych, o promieniu r_0 każda, powstała jedna bańka o promieniu r_1 . Oszacuj wartość jej promienia. Ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_0 \approx 10^5$ Pa, a dla napięcia powierzchniowego σ roztworu wody z mydłem przyjmij $\sigma \approx 25 \cdot 10^{-3}$ J/m².
Rozwiązanie na str. 7

F 936. Jednym z dowodów potwierdzających ogólną teorię względności był pomiar przesunięcia częstotliwości kwantów promieniowania γ podczas ich „spadania” w polu grawitacyjnym. Oszacuj, jaką prędkość u w górę należy nadać emiterowi promieniowania γ , żeby skompensować zmianę energii kwantów γ „spadających” z wysokości $H = 22,5$ m (taka była różnica wysokości w oryginalnym doświadczeniu R. V. Pounda i G. A. Rebki wykonanym w roku 1960). Przyspieszenie ziemskie $g \approx 10$ m/s², a prędkość światła $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.
Rozwiązanie na str. 7



mała delta

Rekreacyjna lingwistyka z matematyką

Martin Gardner został w 1967 roku poproszony przez wydawnictwo Greenwood Press o pomysły na nowe czasopisma. Jako efekt jego rekomendacji powstały wówczas *Journal of Recreational Mathematics* (JRM) oraz *Word Ways – Journal of Recreational Linguistics* (JRL).

Redaktorem naczelnym JRM został przyjaciel Gardniera, Joseph Madachy (1927–2014), autor książek *Mathematics on Vacation*, *Madachy's Mathematical Recreations* oraz *Mathematical Diversions*, poświęconych jego ulubionym dziedzinom matematyki rekreacyjnej, w tym także kryptarytmetyce. Greenwood wydał tylko pięć roczników, po czym wydawnictwo zostało przejęte aż do 2015 roku przez Baywood Publishing Company. W 2014 roku zmarł Joseph Madachy, a Baywood zrezygnował generalnie z publikowania czasopism. Ostatni numer JRM (vol. 38, numer 2) ukazał się na początku 2015 roku.

Pierwszym redaktorem JRL został w 1968 roku, zaproponowany przez Gardniera, Dmitri Borgmann. Jest to autor książki *Language on Vacation* oraz twórca terminu *logologia* (ang. *logology*), określającego wszelkiego rodzaju zabawy i gry słowne, czyli dziedzinę bardzo bliską Gardnerowi i pokrewną *szaradziarstwu* uprawianemu przez autora tego tekstu. W roku 1969 funkcję redaktora przejął Howard Bergerson, pisarz i poeta, autor książki *Palindromes and Anagrams*. W 1970 roku wydawcą i redaktorem został matematyk, statystyk i logolog A. Ross Eckler Jr. (autor książki *Making the Alphabet Dance*), od którego w roku 2007 obie funkcje przejął i pełni je do dziś Jeremiah Farrell, matematyk z Butler University (Indianapolis, Indiana, USA).

Oba czasopisma łączyły nie tylko wspólne powstanie i postać wszechobecnego Martina Gardniera, który pomagał przy ich narodzinach, a później również w obu publikował artykuły. Łączyła je szersza grupa autorów, którzy podobnie jak Gardner pisali dla obu pism – na przykład Donald Knuth, Steven Kahan, Will Shortz, Mike Keith, Leonard Gordon.

Jednym ze stałych działów JRM był *Alphametics and solutions to alphametics*. Przez kilka początkowych lat rubrykę tę prowadził J. A. H. Hunter, po czym jej redakcją przejął Steven Kahan, wykładowca matematyki w Queens College na City University of New York.

Moje kontakty z JRM rozpoczęły się w roku 1983 publikacją pierwszego *idealnego układu alfametyków podwójnie prawdziwych*. Szczególnie intensywnie współpracowałem z JRM w latach 2000–2014.

Likwidacja JRM była dla mnie niemiłym zaskoczeniem. Steven Kahan napisał mi wówczas, że stara się przenieść swoją rubrykę do innego pisma. Zabiegi odniosły skutek – w połowie 2015 roku kolumna *Alphametics and solutions to alphametics* odżyła w JRL (vol. 48, numer 3), w nieco szczuplejszej niż w JRM formie, ale z niezłymi szansami dalszego rozwoju. W sześciu kolejnych numerach ukazało się kilkanaście moich propozycji.

W numerze 49/3 JRL opublikował mój „firmowy” alfametyk:

$$\text{WORD} \times \text{WAYS} = \text{LOGOLOGY}$$

Jako świeżo upieczony logolog w dalszej części artykułu przedstawię nowe, dotąd niepublikowane alfametyki z pogranicza rekreacyjnej lingwistyki i rekreacyjnej matematyki.

W systemach liczbowych o podstawach większych niż 10: A odpowiada 10, B odpowiada 11, C odpowiada 12 itd. Rozwiązanie w systemie o podstawie 15:
 $C40E \times C869 = A424A426$;
podstawa 16:
 $8CAF \times 8B2E = 4C7C4C72$.

Synonimiczne

BOŻA × KRÓWKA = BIEDRONKA (podstawa 15)

$$723A \times 10EC1A = 794802B1A$$

GRUBA × RYBA = DYGNITARZ (podstawa 14)

$$3867B \times 817B = 2134DAB89$$

KAWAŁ + CHŁOPA = CHŁOP + NA + SCHWAŁ (podstawa 10; warunek dodatkowy: w rozwiązaniu słowa

CHWAŁA odpowiadać powinna liczba złożona z samych cyfr nieparzystych) $21513 + 973401 = 97340 + 61 + 897513$

(SKRZAT)² = KRASNOLUDEK (podstawy 23 i 24)

$$\text{podstawa 23: } 3CD78E \times 3CD78E = CD83F1G4H2C;$$

$$\text{podstawa 24: } 3C8KE6 \times 3C8KE6 = C8E3A542B1C$$

Cytaty, porzekadła i podobne różności

KROKODYLA = DAJ × MI × LUBY (podstawa 15, bez zera proszę!)

$$34A3A56DC = 57C \times 9B \times D1E6$$

MILE × ZŁEGO = POCZĄTKI (podstawa 13, bez zera proszę!)

$$745C \times 15C69 = A9312B84$$

MŁOT × ZŁOM = KOWADŁO (podstawa 11)

$$2758 \times 1752 = 4563075$$

EWO × TO × OWOC = ZAKAZANY (podstawy 14 i 15)

$$\text{podstawa 14: } 523 \times 83 \times 323A = 97D797B6;$$

$$\text{podstawa 15: } A92 \times 32 \times 292D = 5BCB5B87$$

Pierwiastki

VOX + $\sqrt{\text{POPULI}}$ + VOX = DEI (podstawa 10)

$$240 + \sqrt{141376} + 240 = 856$$

$\sqrt{\text{ALA}}$ = MA - $\sqrt{\text{KOTA}}$ (podstawa 10)

$$\sqrt{484} = 54 - \sqrt{1014}$$

$\sqrt{\text{CYKLON}}$ = OKO (podstawa 14)

$$\sqrt{5D1A9B} = 919$$

$\sqrt{\text{LIBERUM}}$ = VETO (podstawa 12)

$$\sqrt{850A641} = 2A9B$$

$\sqrt{\text{DOSIEGÓ}}$ = ROKU (podstawa 12)

$$\sqrt{B471604} = 345A$$

$\sqrt{\text{BOLESŁAW}}$ = PRUS (podstawa 11)

$$\sqrt{21805A73} = 4965$$

Potęgi

(PISZ)³ = (USTKA)² (podstawa 10)

$$(1024)^3 = (32768)^2$$

(ŁAD)³ = PORZĄDEK (podstawy 14 i 15)

$$\text{podstawa 14: } (49B)^3 = 75A80B21; \text{ podstawa 15: } (4B2)^3 = 719A62C8$$

(ŁUT)³ = SZCZĘŚCIA (podstawa 22, bez zera)

$$(IF2)^3 = DAC9KC48$$

FARBOWANY = (LIS)³ (podstawa 12)

$$3018520B4 = (76A)^3$$

(KOŚĆ)² = NIEZGODY (podstawa 11)

$$(67A8)^2 = 41253709$$

(FATA)² = MORGANA (podstawa 11)

$$(3181)^2 = 9A76151$$

(POST)² = SCRIPTUM (podstawa 12)

$$(8453)^2 = 5A078369$$

(IDEA)² = MRZONKA (podstawa 10)

$$(2396)^2 = 5740816$$

(KIJE)² = SAMOBIJE (podstawa 10)

$$(5376)^2 = 28901376; (8625)^2 = 74390625$$

(ŻÓŁW)² = GUZDRAŁA (podstawa 12)

$$(B087)^2 = A2394181$$

Grzybki

RYDZ × KURKA = SUROJADKA (podstawa 15)

$$D0A1 \times 79D73 = 69DC53A73$$

(RYDZ)² = KOŻLARZ (podstawa 10)

$$(2945)^2 = 8673025$$

Kwadratura koła i inne matematyczne bluźnierstwa

(KOŁO)² = KWADRAT (podstawa 16)

$$(1626)^2 = 1EA8DA4$$

(ROMB)² = KWADRAT (podstawy 11, 13 i 14)

$$\text{podstawa 11: } (3107)^2 = 964A345; \text{ podstawa 13: } (3108)^2 = 964A34C;$$

$$\text{podstawa 14: } (19A5)^2 = 2C3813B$$

257 × TANGENS = COTANGENS (podstawa 10)

$$257 \times 3671875 = 943671875$$

1111 × FIGURA = GEOMETRIA (podstawa 10)

$$1111 \times 374089 = 415612879$$

Podwójnie prawdziwy

JEDEN + PIĘĆ × SIEDEM = SZEŚĆ × SZEŚĆ (podstawa 16)

$$A0908 + 56FB \times 460903 = 4E0CB \times 4E0CB$$

Małą Deltę przygotował Andrzej BARTZ

*nauczyciel, V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

W *Delcie* 7/2017 przedstawiliśmy kilka „olimpijskich” zastosowań twierdzenia *Combinatorial Nullstellensatz*, które sformułowaliśmy następująco.

Twierdzenie (*Combinatorial Nullstellensatz*). Niech $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będzie niezerowym wielomianem n zmiennych stopnia $\sum_{i=1}^n m_i$, w którym współczynnik przy $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ jest różny od zera. Wówczas dla dowolnych zbiorów $S_1, \dots, S_n \subset \mathbb{R}$ spełniających warunki $|S_i| > m_i$ dla $1 \leq i \leq n$, istnieją takie $c_i \in S_i$, że $P(c_1, \dots, c_n) \neq 0$.

Okazuje się, że zamiast „zwykłych” wielomianów wielu zmiennych możemy rozważać wielomiany o współczynnikach będących resztami z dzielenia przez pewną liczbę pierwszą p , z dodawaniem i mnożeniem modulo p . Zbiór tych reszt wraz z tak określonymi operacjami oznaczamy będziemy jako \mathbb{Z}_p . Dla $p = 5$ będziemy zatem mieli, na przykład,

$$3 \cdot 4 = 2, (3xy + 4x^2) + 2xy = -x^2, \text{ czy } (3x + y)(3x - y) = -x^2 - y^2.$$

Poniżej przedstawimy trzy klasyczne twierdzenia, których proste dowody są oparte na *Combinatorial Nullstellensatz* w wersji „resztowej”. Twierdzenia te są szczególnie bliskie zastosowaniom olimpijskim.

Twierdzenie (Cauchy’ego–Davenporta). Dla dowolnej liczby pierwszej p i dowolnych zbiorów $A, B \subset \mathbb{Z}_p$ zachodzi nierówność

$$|A + B| \geq \min\{p, |A| + |B| - 1\},$$

gdzie $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Dowód. Przyjmijmy najpierw, że $|A| + |B| > p$. Niech c będzie dowolnym elementem zbioru \mathbb{Z}_p . Zdefiniujmy dla elementu c zbiór $C = \{c - b : b \in B\}$. Zbiór C jest równoliczny ze zbiorem B , zatem $|A| + |C| > p$. To oznacza, że istnieje element wspólny zbiorów A i C . Niech elementem wspólnym będzie $a_0 \in A$ oraz $c - b_0 \in C$. Wówczas $a_0 = c - b_0$, czyli $a_0 + b_0 = c$. Wobec dowolności wyboru c otrzymujemy, że $A + B = \mathbb{Z}_p$.

Załóżmy teraz, że $|A| + |B| \leq p$. Dla dowodu nie wprost przypuścimy, że $|A + B| \leq |A| + |B| - 2$. Wówczas w \mathbb{Z}_p istnieje zbiór $C \supset A + B$ spełniający warunek $|C| = |A| + |B| - 2$. Rozważmy wielomian

$$f(x, y) = \prod_{c \in C} (x + y - c)$$

o współczynnikach z \mathbb{Z}_p . Jego stopień jest równy $|A| + |B| - 2$, a współczynnik przy $x^{|A|-1}y^{|B|-1}$ jest przystający do $\binom{|A|+|B|-2}{|A|-1}$ modulo p . To wyrażenie nie jest podzielne przez p , ponieważ $|A| + |B| \leq p$, jest zatem (modulo p) różne od 0. Na podstawie *Combinatorial Nullstellensatz* istnieją takie elementy $a \in A, b \in B$, że $f(a, b) \neq 0$. To jest niemożliwe, gdyż $A + B \subset C$. Zatem $|A + B| \geq |A| + |B| - 1$. \square

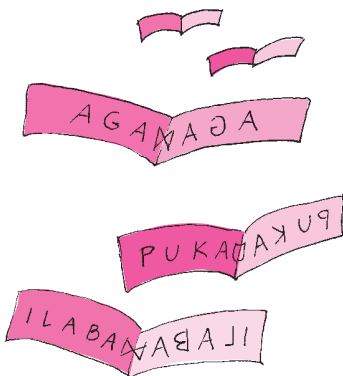
Twierdzenie (Erdős–Heilbronna). Dla dowolnej liczby pierwszej p i dla dowolnego zbioru $A \subset \mathbb{Z}_p$ zachodzi nierówność:

$$|A \oplus A| \geq \min\{p, 2|A| - 3\},$$

gdzie $A \oplus B = \{a + b : a \in A, b \in B, a \neq b\}$.

Dowód. Dla $p = 2$ twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy więc, że $p \geq 3$. Niech $2|A| - 3 \geq p$. Wykażemy, że $A \oplus A = \mathbb{Z}_p$. Wybierzmy dowolny element $m \in \mathbb{Z}_p$. Rozbijmy zbiór \mathbb{Z}_p na pary elementów, których suma w \mathbb{Z}_p jest równa m . Otrzymujemy $\frac{p-1}{2}$ par oraz jeden element, który tworzy parę sam ze sobą. Wobec założenia $|A| \geq \frac{p+3}{2}$, na podstawie zasady Dirichleta, do zbioru A należą dwa różne elementy jednej z par, a więc $m \in A \oplus A$, co należało dowieść.

Niech teraz $2|A| - 3 < p$. Wybierzmy dowolny element $a \in A$ i zdefiniujmy $B = A \setminus \{a\}$. Łatwo zauważyć, że $A \oplus B \subset A \oplus A$. Potrzeba jeszcze pokazać, że $|A \oplus B| \geq \min\{p, 2|A| - 3\}$. Wykażemy, że w tym przypadku $|A \oplus B| \geq 2|A| - 3$. Dla dowodu nie wprost przyjmijmy, że istnieje taki podzbiór $C \subset \mathbb{Z}_p$, że



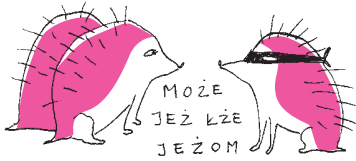
$|C| = 2|A| - 4$ oraz $A \oplus B \subset C$. Rozważmy wielomian

$$f(x, y) = (x - y) \prod_{c \in C} (x + y - c)$$

o współczynnikach z \mathbb{Z}_p . Jest to wielomian stopnia $2|A| - 3$, a współczynnik przy $x^{|A|-1}y^{|A|-2}$ jest równy

$$\binom{2|A| - 4}{|A| - 2} - \binom{2|A| - 4}{|A| - 1} = \frac{(2|A| - 4)!}{(|A| - 2)! (|A| - 1)!}$$

i jest różny od 0 w \mathbb{Z}_p , gdyż $2|A| - 4 < p$. Ponieważ zbiór A ma moc większą niż wykładnik x oraz $|B| = |A| - 1$, to z *Combinatorial Nullstellensatz* wynika, że istnieją takie elementy $a \in A, b \in B$, że $f(a, b) \neq 0$. Otrzymaliśmy sprzeczność z własnością $f(a, b) = 0$ dla dowolnych $a \in A, b \in B$. \square



Twierdzenie (Erdősa–Ginzburga–Ziva). Niech $n \in \mathbb{N}_+$. Wówczas wśród dowolnych $2n - 1$ liczb całkowitych można wybrać n liczb, których suma jest podzielna przez n .

Dowód. Najpierw wykażemy, że twierdzenie jest prawdziwe, jeśli n jest liczbą pierwszą; zgodnie z notacyjną tradycją przyjmijmy oznaczenie $p = n$. Niech a_1, \dots, a_{2p-1} będą danymi liczbami całkowitymi. Bez straty ogólności można założyć, że $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{2p-1} \leq p - 1$, gdyż możemy rozważyć tylko reszty z dzielenia liczb a_1, \dots, a_{2p-1} przez n . Rozważmy dwa przypadki.

Przypadek 1. Jeżeli $a_{i+p-1} = a_i$ dla pewnego $i \in \{1, \dots, p\}$, to twierdzenie jest oczywiste: wybieramy liczby $a_i = a_{i+1} = \dots = a_{i+p-1}$, których suma jest podzielna przez p .

Przypadek 2. Niech $a_{i+p-1} > a_i$ dla dowolnej liczby $i \in \{1, \dots, p\}$. W tym przypadku rozważmy dwuelementowe zbiory

$$S_1 = \{a_1, a_p\}, S_2 = \{a_2, a_{p+1}\}, \dots, S_{p-1} = \{a_{p-1}, a_{2p-2}\}$$

oraz zbiór jednoelementowy $S_p = \{a_{2p-1}\}$. Zdefiniujmy wielomian

$$P(x_1, \dots, x_p) = (x_1 + \dots + x_p)^{p-1} - 1.$$

Wielomian P jest stopnia $p - 1$ i współczynnik przy jednomianie $x_1 \cdot \dots \cdot x_{p-1}$ jest równy $(p - 1)!$. Nie jest on równy 0, gdyż na podstawie twierdzenia Wilsona $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$. Na podstawie *Combinatorial Nullstellensatz* istnieje taki element $(s_1, s_2, \dots, s_p) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_p$, że $P(s_1, \dots, s_p) \neq 0$. Gdyby suma $s = s_1 + \dots + s_p$ nie była podzielna przez p , to na podstawie Małego Twierdzenia Fermata p byłoby dzielnikiem $s^{p-1} - 1$, co nie jest prawdą, gdyż $P(s_1, \dots, s_p) \neq 0$. Wobec tego suma $s = s_1 + s_2 + \dots + s_p$ jest podzielna przez p .

Teraz wykażemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n . Każda liczba naturalna n ma jednoznaczny rozkład, z dokładnością do kolejności, na iloczyn liczb pierwszych. Udowodniliśmy twierdzenie dla każdej liczby pierwszej. Zatem wystarczy wykazać, że twierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego iloczynu liczb pierwszych. Wobec tego wystarczy wykazać, że jeżeli twierdzenie jest prawdziwe dla dwóch liczb naturalnych a i b , to jest prawdziwe dla ich iloczynu ab .

Założmy, że twierdzenie jest prawdziwe dla dwóch dodatnich liczb naturalnych a i b . Wykażemy, że jest także prawdziwe dla ich iloczynu ab . Spośród $2ab - 1$ liczb wybierzmy $2a - 1$ liczb. Spośród nich można wybrać a liczb, których suma jest podzielna przez a . Zatem pozostaje $2ab - 1 - a$ liczb. Ponownie wybierzmy $2a - 1$ spośród nich. Wśród nich jest a liczb, których suma jest podzielna przez a . Pozostaje $2ab - 1 - 2a$ liczb. Postępujemy analogicznie $2b - 1$ razy. Otrzymujemy w ten sposób $2b - 1$ zbiorów, z których każdy zawiera a elementów, a suma tych elementów w każdym z tych zbiorów jest podzielna przez a . Potraktujmy sumę wybranych elementów każdego z tych zbiorów jako jedną liczbę i podzielmy ją przez a . Otrzymujemy $2b - 1$ liczb, spośród których możemy wybrać b liczb, których suma jest podzielna przez b . Zatem uzyskaliśmy ab liczb, których suma jest podzielna przez ab , co kończy dowód twierdzenia, jak również cały artykuł; Czytelnikom, którzy nawet teraz odczuwają niedosyt *Combinatorial Nullstellensatz*, polecam lekturę pozycji wymienionych na marginesie.

Literatura

- [1] T. Andreescu, G. Dospinescu, *Problems from the book*. XYZ Press, 2008.
- [2] T. Bartnicki, *Combinatorial nullstellensatz, czyli o algebrze w kombinatoryce*, Matematyka Społeczeństwo Nauczanie, nr 38 (2007), str. 14–18.
www.smp.uph.edu.pl/czasopismo/msn

Ciemna strona Internetu

Internet to bez wątpienia jedno z najważniejszych osiągnięć ludzkości w XX wieku. Jest to ogromna sieć komputerów z całego świata, która umożliwia szybką komunikację. Co więcej, jest tak zaprojektowana, aby uzyskać bardzo dużą niezawodność. To znaczy, jeśli jakiś węzeł w sieci, jakiś kabel łączący pewne węzły, czy nawet spora część wszystkich węzłów i kabli, ulegnie awarii, to i tak reszta sieci będzie potrafiła się komunikować, znajdując *ad hoc* nowe ścieżki między nieuszkodzonymi węzłami.

Powyzsza własność (niezawodność) była głównym założeniem Internetu i została zrealizowana naprawdę znakomicie (technicznie ten model nazwano TCP/IP). Natomiast projektanci zupełnie pominieli inny aspekt – prywatność komunikacji. W samym czystym Internecie nie ma wbudowanych żadnych mechanizmów szyfrowania. Innymi słowy, każda porcja wysyłanej informacji (czyli tak zwany *pakiet* TCP/IP) biegnie po sieci jawnym tekstem, co oznacza, że każdy po drodze może odczytać jej treść, nadawcę, odbiorcę. Naturalnie to nie jest tak, że o bezpieczeństwie nikt nie pomyślał. Po prostu uznano, że ten element (jeśli będzie potrzebny) załatwi się – jak to się żargonowo mówi – *w wyższej warstwie abstrakcji*.

I rzeczywiście – tajność *treści* wiadomości użytkownicy mogą sobie stosunkowo łatwo zapewnić. Wystarczy, że sami będą (albo zrobi to za nich jakieś oprogramowanie czy protokół warstwy wyższej, np. TLS) szyfrować wiadomości lokalnie na swoich komputerach i wysyłać do Internetu już tylko szyfrogramy.

Schody zaczynają się gdzie indziej. Znacznie trudniej ukryć jest sam fakt *odbycia* komunikacji w Internecie między węzłem sieci X a węzłem Y . Z tym problemem stara się sobie radzić społeczność projektu TOR (*The Onion Router*, czyli „trasowanie cebulowe”). Pomysł polega na tym, aby wysyłanie bezpośrednio wspomóc obecnością trzech (wylosowanych ze społeczności!) pośredników. Zamiast pakietów $[X \rightarrow Y]$ po Internecie będą się więc kręciły wyłącznie pakiety $[X \rightarrow P_1]$, $[P_1 \rightarrow P_2]$, $[P_2 \rightarrow P_3]$ oraz $[P_3 \rightarrow Y]$. Co więcej, odpowiednio szyfrowane są również adresy węzłów, z czego wynika, że adres X -a zna tylko (zakładając jego uczciwość względem społeczności TOR) P_1 , a adres Y -a – tylko P_3 .

TOR jest więc swoistą siecią w sieci, gdzie węzły przede wszystkim pośredniczą w komunikacji między innymi węzłami. Gdy ruch jest duży, to ścieżki komunikacji często na siebie nachodzą, co sprawia, że z zewnątrz (spoza TORa) w zasadzie nie jest możliwe odczytanie, kto z kim *naprawdę* się komunikuje.

Oczywiście, jak zawsze w kryptologii, należy się zastanowić, co się stanie, gdy kontrolę nad częścią węzłów TORa przejmie *ten zły* (albo ten dobry, w zależności od miejsca siedzenia względem barykady). Jest jasne, że ktoś, kto jednocześnie kontroluje P_1 , P_2 oraz P_3 , wie, że X rozmawia z Y . Z drugiej strony – szyfrowanie adresów zapewnia, że nawet kontrola nad dwoma spośród trzech pośredników pozwala co najwyżej stwierdzić, że zarówno X , jak i Y korzystają z TORa, ale w żaden

sposób nie umożliwia ich wzajemnego skojarzenia. (Oczywiście oznacza to, że bezpieczeństwo TORa musi opierać się na założeniu, że procent *przejętych* węzłów jest niski).

TOR umożliwia jeszcze więcej, konkretnie – tworzenie tak zwanych *serwisów ukrytych*. Polega to na tym, że można stworzyć jakiś serwis (powiedzmy stronę www) w taki sposób, aby nikt nie mógł go zamknąć ani nie mógł odkryć, kto go stworzył. To zadanie nie jest wcale dużo trudniejsze od ukrytej komunikacji. Autor serwisu wybiera (losuje) w sieci TOR kilka węzłów, odzywa się do nich (oczywiście anonimowo, za pomocą opisanego wyżej systemu trzech pośredników) i prosi, aby pełnili rolę ukrytych wejść do jego serwisu. Klienci serwisu nigdy nie będą odzywać się do niego bezpośrednio, a jedynie właśnie poprzez te ukryte wejścia (a i do nich tylko za pomocą trzech pośredników). Ostatecznie, po zakończeniu protokołu wejścia do serwisu od klienta do serwera jest aż sześciu pośredników.

Anonimowość, którą oferuje TOR, jest niezwykle duża. Aby się o tym przekonać, zacytujmy fragment z tajnego raportu amerykańskiej agencji NSA, który został upubliczniony przez Edwarda Snowdena. NSA pisze w nim, że TOR jest „królem superbezpiecznych i szybkich sieci anonimizujących”. Opisuje też pomysły na pewne ataki na cyberprzestępców (operacja pod kryptonimem Egoistyczna Żyrafa). Z dokumentu wynika, że NSA ma z TOREM poważny problem i odnosi tylko drobne sukcesy w walce z nim. TOR sam w sobie nie został nigdy skutecznie zaatakowany. Natomiast udało się zamknąć niektóre serwisy ukryte wewnątrz TORa, na przykład portal Silk Road (<http://silkkroadvb5piz3r.onion>), na którym handlowano przede wszystkim substancjami psychoaktywnymi.

Co pewnie oczywiste, płatności w serwisach ukrytych dokonuje się zwykle za pomocą bitcoinów. Dla pełnej anonimowości pozostaje jednak problem, jak niepostrzeżenie je zdobyć. Ale i tutaj ludzkość sobie poradziła. Poniżej przykład prawdziwego ogłoszenia (jak podał satoshi.pl za localbitcoins.com), które można było znaleźć w „tradycyjnym” Internecie:

Jesteś z Trójmiasta i chcesz kupić bitcoiny za gotówkę, aby być całkowicie anonimowym posiadaczem najpopularniejszej kryptowaluty? Żadnych przelewów, osobista sprzedaż za gotówkę, koszt całkowity = 1,05 x (cena BTC po aktualnym kursie z pln.bitcurex.com) + 20 PLN. Jak to działa? Cała komunikacja z mojej strony odbywa się za pośrednictwem TORa, co i Tobie radzę zrobić. Maile proszę wysyłać jedynie z poczty Tor Mail. Po ustaleniu warunków transakcji, już jako osoba fizyczna, zakupię odpowiednią ilość BTC na giełdzie bitcurex, po czym w ustalonym miejscu i czasie dokonamy wymiany. Tym sposobem WIELKI BRAT będzie tylko wiedział, że ktoś gdzieś kupił kiedyś jakąś ilość bitcoinów, ale już nie będzie w stanie powiązać tej kwoty z Tobą.

Każda nowoczesna technologia ma dwa końce.

Tomasz KAZANA

Informatyczny kącik olimpijski (107): Palindromiczny podciąg

W tym miesiącu omówimy zadanie *Palindromic Subsequence*, które pojawiło się na konkursie SRM 708 na platformie Topcoder.

Palindrom to słowo, które nie zmienia się, gdy czytamy je od prawej do lewej, np. „kajak” lub „abba”.

W zadaniu dane jest słowo s o długości n ($n \leq 3000$) znaków. Dla każdego indeksu i mamy znaleźć liczbę palindromicznych podciągów s , które zawierają i -tą literę s . Wyniki należy wypisać modulo $(10^9 + 7)$.

Innymi słowy: dla ustalonego i mamy 2^{n-1} sposobów na usunięcie niektórych z pozostałych $n - 1$ liter w s . Interesuje nas liczba sposobów, dla których nieusunięte litery utworzą palindrom (i -ta litera jest, oczywiście, nieusunięta).

Zacznijmy od rozwiązania prostszego zadania – policzmy wszystkie palindromiczne podciągi w danym słowie.

Złym pomysłem jest przetwarzanie słowa od lewej do prawej, bo zapewne musielibyśmy dokładnie pamiętać już wybrany podciąg, by później wybrać te same litery w odwróconej kolejności (by powstał palindrom). Zamiast tego policzymy wynik dla każdego przedziału, zaczynając od przedziałów o długości 1.

Niech $in[i][j]$ oznacza liczbę palindromicznych podciągów przedziału $[i, j]$ (tzn. palindromicznych podciągów pod słowa złożonego z liter s_i, s_{i+1}, \dots, s_j). Szczegółem implementacyjnym jest decyzja, czy należy liczyć puste podciągi. Zacznijmy analizę od wstępnego wzoru (wcale nieprzypadkowo podobnego do wzoru na liczenie sum prefiksowych w macierzy!):

$$in[i][j] = in[i+1][j] + in[i][j-1] - in[i+1][j-1].$$

Dodajemy tu liczby palindromicznych podciągów w przedziałach $[i+1, j]$ i $[i, j-1]$, po czym odejmujemy te w przedziale $[i+1, j-1]$, bo policzyliśmy je podwójnie. Policzyliśmy w ten sposób wszystkie palindromiczne podciągi, które występują też w którymś z krótszych przedziałów. Pozostaje jednak nieuwzględniony przypadek, gdy podciąg zawiera i -tą i j -tą literę – taki podciąg nie występuje ani w $[i+1, j]$, ani w $[i, j-1]$. Skoro i -ta i j -ta litera są pierwszą i ostatnią literą w przedziale, muszą one być równe, by powstał palindrom. Jeśli tak rzeczywiście jest, to do $in[i][j]$ powinniśmy jeszcze dodać $in[i+1][j-1]$, bo do każdego z podciągów przedziału $[i+1, j-1]$ możemy teraz dodać i -tą i j -tą literę z przodu i z tyłu, co da nam nowy dłuższy palindrom.

Mówimy, że w palindromie pierwsza litera jest sparowana z ostatnią, druga z przedostatnią itd. Zastanówmy się, jak dla pary indeksów i, j ($i \leq j$) policzyć takie palindromiczne podciągi, które zawierają indeksy i i j , a ponadto w nich te dwie litery są ze sobą sparowane. Musi zatem zachodzić równość $s_i = s_j$, a wzięte indeksy z przedziału $[i+1, j-1]$ muszą tworzyć palindromiczny podciąg. Takich podciągów jest dokładnie $in[i+1][j-1]$. Pozostaje nam jeszcze uwzględnić liczbę możliwych zewnętrznych rozszerzeń, a więc policzyć liczbę takich wyborów, że litery wzięte na lewo od i (te z mniejszymi indeksami) odpowiadają literom wziętym na prawo od j . Tę liczbę oznaczmy przez $out[i-1][j+1]$. Za chwilę pokażemy, jak ją obliczać.

Niech $out[i][j]$ oznacza liczbę palindromicznych podciągów, które zawierają indeksy z przedziałów $[1, i]$ oraz $[j, n]$, a także takich, że litery z $[1, i]$ są sparowane z tymi z $[j, n]$ (czyli te dwa przedziały zawierają po tyle samo wybranych liter). Podobnie jak do liczenia wartości in , możemy zacząć od rekurencyjnego wzoru:

$$out[i][j] = out[i-1][j] + out[i][j+1] - out[i-1][j+1],$$

po czym dodać $out[i-1][j+1]$, jeśli $s_i = s_j$. Uwzględniamy tu podciągi, które zawierają indeksy z $[1, i-1]$ i $[j, n]$ oraz podciągi, które zawierają indeksy z $[1, i]$ i $[j+1, n]$. Do obu tych grup podciągów należą takie, które zawierają indeksy z $[1, i-1]$ i $[j+1, n]$, więc takie policzyliśmy dwukrotnie, co musimy odjąć. Dodatkowo, jeśli litery s_i i s_j są równe, uwzględniamy podciągi, które je zawierają.

Zauważmy, że w każdym palindromicznym podciągu zawierającym i -tą literę, litera ta jest sparowana z dokładnie jedną literą, która musi być, oczywiście, równa s_i . By znaleźć wynik zadania dla i , wystarczy więc przeiterować wszystkie indeksy j ($i \leq j$ i $s_i = s_j$) i zsumować iloczyny $out[i-1][j+1] \cdot in[i+1][j-1]$ (taki iloczyn jest równy liczbie palindromicznych podciągów, w których indeksy i i j są sparowane).

Zarówno obliczenie tablic in i out , jak i końcowe iterowanie par indeksów, ma złożoność czasową $O(n^2)$. Tablice in i out mają rozmiar kwadratowy. Czytelnikowi Z Ograniczoną Pamięcią pozostawiamy zastanowienie się nad implementacją w pamięci liniowej.

Kamil DĘBOWSKI

Wieści z ciekłych pułapek na ciemną materię

Poszukiwanie cząstek ciemnej materii to chyba najlepiej doświadczalnie umotywowana droga wyjścia poza ramy Modelu Standardowego. Grawitacyjny wpływ ciemnej materii jest udokumentowany dla galaktyk, ich gromad, olbrzymich struktur kosmicznych i całego Wszechświata. Nie wiadomo, z czego ciemna materia się składa, ale możliwość, że są to słabo (lub bardzo słabo) oddziałujące cząstki jest na tyle atrakcyjna, że liczba eksperymentów służących ich poszukiwaniu stale rośnie.

Metody poszukiwania takich słabo oddziałujących cząstek są generalnie trzy: pośrednie, bezpośrednie i akceleratorowe. Wszystkie wykorzystują fakt, że oddziaływanie tych cząstek z materią, choć słabe, jest porównywalne do oddziaływania neutrin. W każdym przypadku rozpatruje się ten sam diagram Feynmana z dwiema cząstkami w stanie początkowym i dwiema w stanie końcowym. Za każdym razem inny jest tylko podział na pary.

Pośrednio poszukuje się produktów anihilacji dwóch cząstek ciemnej materii w dwie znane cząstki. Potencjalnymi źródłami są obszary o dużej gęstości ciemnej materii: centra Galaktyki oraz galaktyk satelitarnych. W akceleratorach postępujemy jakby na odwrót: zderzamy znane cząstki w nadziei wytworzenia pary cząstek ciemnej materii. Natomiast poszukiwania bezpośrednie to cierpliwe czekanie na rozproszenie cząstek ciemnej materii z galaktycznego halo na jakimś jądrze materii detektora. Tę możliwość zawdzięczamy ruchowi Układu Słonecznego względem tego halo.

W tej ostatniej odmianie polowania nastąpił kolejny skok jakościowy. Pierwsze wyniki [1] opublikował zespół XENON 1T, dysponujący największym detektorem ksenonowym. Konkretnie wykorzystywane są 3,2 tony tego skroplonego gazu zamkniętego w cylindrze, który jest zanurzony w dużo większym pojemniku wypełnionym wodą, a wszystko ukryto w jednej z jaskiń *Laboratori nazionali del Gran Sasso* wydrążonych obok autostradowego tunelu pod górą Gran Sasso właśnie.

Wykorzystywana do bezpośrednich poszukiwań jest tylko tona ksenonu tzw. objętości czynnej w samym środku, a reszta jest osłoną lub aktywnym obszarem wietującym np. promieniowanie kosmiczne. Jeszcze trudniej wyeliminować tło pochodzące od śladowej radioaktywności. Dlatego używane materiały muszą należeć do najbardziej czystych, co powoduje, że i tak bardzo drogi ksenon jest w tym przypadku jeszcze bardziej unikatowy.

W poszukiwaniach bezpośrednich powszechnie jest stosowanie dwóch niezależnych metod detekcji działających w koincydencji. W przypadku detektorów ksenonowych jest to pomiar scyntytacji wywołanych ruchem szturchniętego jądra oraz scyntytacji wywołane wzmocnieniem gazowym sygnału elektronowego. Sygnał powstaje dzięki temu, że cylinder jest jednocześnie tzw. komorą projekcji czasowej, czyli obszarem, w którym (pionowo skierowane) pole elektryczne kieruje elektrony jonizacji ku górze, gdzie warstwa ksenonu jest w postaci gazowej. Różnica czasu między sygnałami pozwala na ocenę głębokości, na jakiej zaszło oddziaływanie.

Opublikowane zostały wyniki 34 dni pracy detektora [1], czasowo przerwanej przez trzęsienie ziemi 18 stycznia tego roku. Wobec braku sygnału oddziaływania ciemnej materii minimalnie poprawiono ograniczenia na ich zaobserwowanie, co przekonuje o zdolności do istotnego ich poprawienia za pomocą danych, które już na nowo są zbierane.

Okazuje się jednak, że w wyścigu liczy się nie tylko gigantomania, ale również spryt. Ciekawym detektorem jest PICO-60, w którym używa się mniej niż 60 kg C_3F_8 . Jest to eksperyment zlokalizowany w podziemnym laboratorium SNOLAB w Sudbury (Ontario, Kanada), a wykorzystujący na nowo odkrytą technikę komory pęcherzykowej, zarzuconej jakieś 30 lat temu na rzecz elektronicznie odczytywanych detektorów.

Technikę tę w ciągu kilkunastu lat doprowadzono do stanu pozwalającego na rejestracje pojedynczych pęcherzyków, które nie tylko się fotografuje, ale również wsłuchuje w dźwięk towarzyszący ich powstawaniu. Zaawansowane metody statystyczne pozwalają na odróżnienie sygnału od tła. Wszystko razem powoduje, że detektor jest zadziwiająco czuły. Dodatkowo dzięki obecności fluoru o dużej wartości spinu jest szczególnie wrażliwy na tzw. zależne od spinu oddziaływanie cząstek materii i w tej dziedzinie ustanawia najlepsze ograniczenia [2].

Piotr ZALEWSKI

[1] XENON Collaboration, *First Dark Matter Search Results from the XENON1T Experiment*, arXiv:1705.06655v2

[2] PICO Collaboration, *Dark Matter Search Results from the PICO-60 C_3F_8 Bubble Chamber*, arXiv:1702.07666v2

W *Delcie* 8/2017 nie można znaleźć rozwiązania zadania M 1539. Za błąd przeprasamy i przypominamy treść zadania oraz podajemy wreszcie jego rozwiązanie.

Redakcja

M 1539. Dana jest liczba $n \geq 1$ oraz pewien zbiór $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dodatnich liczb całkowitych. Na okręgu wyróżniono 2^n punktów i każdemu z nich przyporządkowano jedną z liczb ze zbioru A . Udowodnić, że iloczyn liczb znajdujących się na pewnym łuku tego okręgu jest kwadratem liczby całkowitej.



Rozwiązanie zadania M 1539.

Rozważmy dowolny łuk danego okręgu zawierający wszystkie wyróżnione punkty i oznaczmy kolejne liczby przyporządkowane wyróżnionym punktom tego łuku przez b_1, b_2, \dots, b_{2^n} . Dla każdej liczby $i = 1, 2, \dots, 2^n$ zdefiniujmy n -wyrazowy ciąg binarny $c_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$ następująco: $c_{ij} = 0$, jeżeli pośród liczb b_1, b_2, \dots, b_i wartość a_j występuje parzystą liczbę razy oraz $c_{ij} = 1$ w przeciwnym przypadku.

Ponieważ jest tylko 2^n binarnych ciągów długości n , więc albo ciągi c_1, c_2, \dots, c_{2^n} są parami różne i $c_i = (0, 0, \dots, 0)$ dla pewnego i , albo $c_k = c_\ell$ dla pewnych $k < \ell$. W pierwszym przypadku iloczyn liczb b_1, b_2, \dots, b_i jest kwadratem liczby całkowitej, w drugim zaś — iloczyn liczb $b_{k+1}, b_{k+2}, \dots, b_\ell$ jest kwadratem liczby całkowitej.

Za górami są góry (przysłowie haitańskie)

Piszę w nastroju wakacyjnym i pod wrażeniem znakomitej monografii, z której zaczerpnęłam wiele cytatów. To tylko parę przykładów, jak bardzo mogą się mylić w ocenie współcześni ocenianego i jak czasami historia zdążyła te omyłki „naprawić”.

- *Po ojcu odziedziczył przystojną kwadratową twarz i krzaczaste brwi, po matce zaś jasną cerę. Z początku bez powodzenia próbował studiować medycynę w Edynburgu, lecz przerażony wrzaskami dzieci przywiązanych pasem do stołu operacyjnego [...] porzucił uczelnię i przeniósł się na teologię w Cambridge. [...] Zajął się zbieraniem chrząszczy, botaniką, geologią, geometrią i fizyką.*

Może gdyby w owych czasach stosowano już znieczulenie ogólne i miejscowe w trakcie interwencji chirurgicznych, **Karol Darwin** nie wyruszyłby w podróż na okręcie *Beagle*, ze znanymi z podręczników konsekwencjami.

★ ★ ★

- *Łagodny, wyrozumiały, dobroduszny. Kwiaty wielce miłował.*

Właściwie współcześni nie zauważyli jego prac, Darwin nie przeczytał, słynny szwajcarski botanik Carl von Nageli dziwił się wyborowi modelu badań. Przed tym wyborem dwukrotnie nie zdał egzaminu nauczycielskiego w Wiedniu. W klasztorze zakazano mu doświadczeń nad myszami, wybrał ogród i groch. Pisał:

- *postęp w doświadczeniach dokonywał się powoli, szybko przekonałem się, że warto prowadzić kilka eksperymentów naraz.*

Mowa o **Grzegorz Mendlu**. Swoją genetykę zawdzięczał nie tyle konwencjonalnej wiedzy (dwukrotnie obłana biologią), ile przenikliwemu zmysłowi obserwatora.

★ ★ ★

Thomas Morgan uchodził za dziarskiego, hałaśliwego ekscentryka i obsesjonata, nieustannie poszukującego nowych problemów badawczych. Otrzymując w 1933 roku Nagrodę Nobla z fizjologii i medycyny za odkrycia pokazujące rolę chromosomów w dziedziczeniu, dokonane w doświadczeniach na muszce *Drosophila melanogaster*, wyraził wątpliwość:

- *najważniejszy wkład genetyki w nauki medyczne ma charakter czysto intelektualny, genetyka w najbliższej przyszłości nie wywrze żadnego wpływu na zdrowie człowieka. Pomyśl, że nastanie dzień, gdy lekarze będą prosić swych kolegów genetyków o konsultację, zakrawa na niemądrą, niedorzeczną fantazję.*
- *To tępak, istny wiercipięta, ruchliwy i głośny,*

piisał do żony po spotkaniu z Thomasem Morganem w 1912 roku William Bateson.

★ ★ ★

Gdy **Oswald Avery** dowiedział się o eksperymentach Griffitha (pierwsza transformacja bakterii), miał już 55 lat. Był drobnym, kruchym, lysiejącym okularnikiem o ptasim głosie i cienkich rękach, jak nagie gałęzie zimą. Cieszył się reputacją kompetentnego mikrobiologa, ale nie przypuszczał, że wybierze się w świat genów i chromosomów. Trzykrotnie odrzucano wnioski o Nagrodę Nobla dla Avery’ego wobec opinii szwedzkiego chemika E. Hammarstena z Komitetu Noblowskiego, że rezultaty Avery’ego nie mogą być prawdziwe. W 1943 roku Avery pisał do brata:

- *jeżeli mamy rację, co nie zostało jeszcze dowiedzione, kwasy nukleinowe są istotne nie tylko strukturalnie, ale i funkcjonalnie, wywołują przewidywalne i dziedziczne zmiany w komórkach. Implikacje będą dalekosiężne, genetycy śnili o tym od dawna.*

★ ★ ★

Publikację **Martina Chalfiego**, stanowiącą później podstawę do przyznania Nagrody Nobla z chemii w 2008 roku za odkrycie i zastosowanie GFP (białko fluoryzujące w zakresie zieleni), odrzucili w pierwszej wersji dwaj recenzenci z tygodnika *Science* jako mało istotną i niedającą odpowiedzi na pytanie, po co meduzie takie białko. Założyli, jakże mylnie, że i nam ono po nic.

★ ★ ★

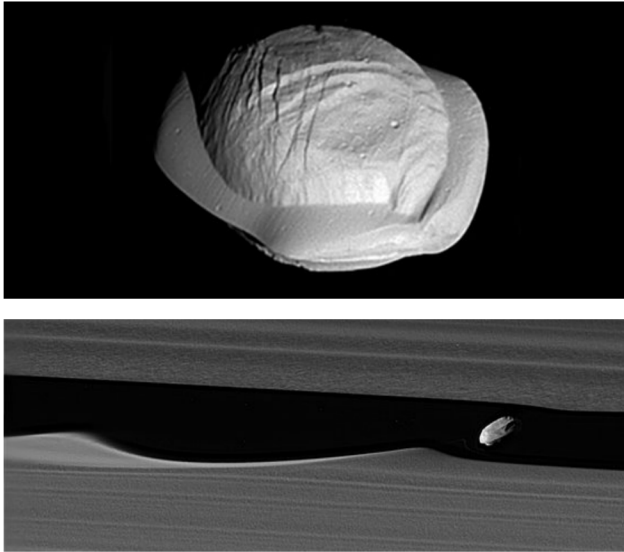
Barbara Mc Clintock (1902–1992) odkryła w latach 1940–50 zjawisko „skaczących genów”, komentując je i wyjaśniając. Wzbudzając powszechny sceptycyzm naukowy, od 1953 przestała te prace publikować. W 1983 roku otrzymała, jako jedyna w tamtym roku, Nagrodę Nobla w medycynie (!) za wykrycie opisywanego zjawiska na modelu kukurydzy. Na bankiecie sztokholmskim powiedziała m.in.:

- *moje odkrycia nie mieściły się w przyjętych dogmatach, a moje prace ignorowano, odrzucano. Byłam zdumiona, uznając swoje dowody i rozumowanie za satysfakcjonujące, choć zbyt radykalne na tamte czasy. Nim te wyniki potwierdzili inni, nie zapraszano mnie na wykłady i seminaria ani do oceniających zespołów i komitetów. A mimo to tę długą przerwę uznaję za przyjemną – dała mi pełną wolność kontynuacji i czystą radość badacza-odkrywcy.*

Magdalena FIKUS

Prosto z nieba: Pan Pieróg

Pan (Saturn XVIII) jest drugim od Saturna księżycem planety (okres orbitalny 13,8 godzin). Został odkryty stosunkowo niedawno, dopiero w 1990 roku, przez Marka R. Showaltera na podstawie analizy zdjęć sondy Voyager 2 w przerwie Enckego pierścienia A Saturna, zebranych na początku lat 80. XX wieku. Księżyc znajdujący się w przerwie pierścienia (efektywnie będąc przyczyną powstania przerwy, ponieważ to jego oddziaływanie grawitacyjne oczyszcza wybrane orbity z gazu i pyłu) jest nazywany księżycem pasterskim. Być może także dlatego księżyc nazwano imieniem mitologicznego Pana, bożka pasterzy. Przerwa natomiast nazywa się na cześć Johanna Franza Enckego (1791–1865), który co prawda nie był jej odkrywcą, ale wykonał wiele pionierskich obserwacji Saturna.



Zdjęcie księżycyca Pan wykonane przez wąskokątną kamerę Imaging Science Subsystem (ISS) sondy Cassini z odległości około 25 tysięcy km. Poniżej: Pan w przerwie Enckego, wśród wywołanych przez siebie fal.

Sam księżyc jest niewielki ($34 \times 31 \times 21$ km) i waży około $5 \cdot 10^{15}$ kg, jednak już ta niewielka jak na astronomiczne standardy masa jest w stanie otworzyć poprzez przyciąganie grawitacyjne przerwę o szerokości 325 km w gazowo-pyłowym dysku Saturna. Podczas ruchu orbitalnego Pan tworzy „kilwater” w materiale pierścienia po obu stronach przerwy. Cząstki pierścienia znajdujące się po stronie bliższej Saturna poruszają się szybciej, wyprzedzają księżyc, dostając od niego przy okazji grawitacyjnego „kopniaka”. Oddziaływanie księżycyca sprzyja powstawaniu fal rozciągających się na setki kilometrów w materii pierścienia. Nakładające się w niektórych miejscach fale tworzą widoczne na zdjęciach Cassiniego zgęstki. Dokładnie w środku przerwy oprócz księżycyca znajdują się także pasmo cząstek – *ringlet* – na orbicie w kształcie podkowy (*horseshoe orbit*). Dziwaczny, a jednocześnie jakże znajomy kształt księżycyca jest skutkiem stopniowego odkładania się na jego powierzchni pyłu pochodzącego z pierścienia i materii ringletu.

Michał BEJGER

Niebo we wrześniu

W zeszłym miesiącu Księżyc zahaczył o cień Ziemi, rzucił też swój cień na powierzchnię naszej planety. Natomiast we wrześniu podczas pełni i nowiu, kiedy to mogą zajść te zjawiska, Księżyc znajdzie się ponad 2° od ekliptyki, co oznacza, że do zaćmień nie dojdzie. Srebrny Glob, przemierzając niebo w swoim cyklu miesięcznym, zacznie miesiąc po I kwadrze, 6 września przejdzie przez pełnię, 13 września – przez ostatnią kwadrę, 20 września – przez now i 28 września przez I kwadrę. Po drodze minie sporo jasnych gwiazd i planet, z których kilka zakryje (w tym planety Merkury, Wenus, Mars i Neptun oraz gwiazdy Aldebaran i Regulus). Niestety, poza Regulusem żadne z tych zakryć nie będzie widoczne w Europie, ale nawet i to zjawisko da się obserwować jedynie z Sycylii. Dzięki korzystnemu nachyleniu ekliptyki do wschodniego widnokregu Księżyc widoczny będzie prawie do samego nowiu. 19 września, tuż przed świtem, Srebrny Glob znajdzie się na wysokości niecałych 4° nad widnokregiem, a do nowiu Księżycowi zabraknie wtedy jedynie 26 godzin. Tego ranka odpowiednio 3° i 5° na godzinie 1 względem niego świecić będą Merkury i Mars, zaś 10° dalej w tym samym kierunku znajdzie się para Wenus-Regulus. Między ostatnią kwadrą a nowiem bardzo dobrze będzie widoczne tzw. światło popielate, czyli nocna część Księżycyca (nieoświetlona bezpośrednio przez Słońce), oświetlona promieniami słonecznymi, odbitymi od Ziemi. W ciągu miesiąca dnia ubywa o kolejne ponad dwie godziny i pod jego koniec dzień jest już wyraźnie krótszy od nocy. 22 września Słońce przetnie równik niebieski w drodze na południe, rozpoczynając na półkuli północnej Ziemi astronomiczną jesień i jednocześnie astronomiczną wiosnę na półkuli południowej, ale dzięki refrakcji



atmosferycznej faktyczna równonoc nastąpi kilka dni później, 25 września (na półkuli południowej – kilka dni wcześniej).

Wśród planet Układu Słonecznego Jowisz zachodzi niecałą godzinę po Słońcu i z naszych szerokości geograficznych jest praktycznie niewidoczny, Saturna można obserwować w pierwszej części nocy nisko nad południowo-zachodnim widnokregiem, gdzie świeci na tle gwiazdozbioru Wężownika, jako gwiazda o jasności $+0,5^m$. We wrześniu Saturn utrzyma trend sierpniowy, czyli powolnego pogarszania się warunków obserwacyjnych. 1 września niecałe 30° na wschód od Saturna świecić będzie Księżyc w fazie 81%, natomiast 26 i 27 września Srebrny Glob minie tę planetę w znacznie mniejszej odległości. Pierwszego z wymienionych dni Księżyc w fazie 37% znajdzie się niecałe 4° od Saturna, dobę później faza Księżyca urośnie do 47% i przesunie się on na pozycję 9° na wschód od planety z pierścieniami. Neptun na początku miesiąca przejdzie przez opozycję i będzie przebywał na niebie całą noc. Ostatnia planeta Układu Słonecznego świeci we wrześniu z jasnością $+7,8$ wielkości gwiazdowej, zatem do jej obserwacji potrzebna jest przynajmniej lornetka. W trakcie miesiąca Neptun zmniejszy dystans do jaśniejszej o ponad 4^m gwiazdy λ Aquarii o kolejne $40'$, do nieco ponad $39'$. Księżyc spotka się z Neptunem w czasie pełni. 6 września nad ranem oba ciała niebieskie dzielić będzie odległość nieco ponad 2° (mieszkańcy Argentyny i Chile będą mogli obserwować zakrycie Neptuna przez Księżyc). Jednak silny blask Księżyca w praktyce uniemożliwi wtedy obserwacje tej planety, w tym zakrycia. Uran swoją pętlę po niebie kreśli mniej więcej 45° od Neptuna, czyli w dwukrotnej rozpiętości wyciągniętej przed siebie dłoni z rozstawionymi palcami, ale dzięki deklinacji większej o 17° od niego wschodzi tylko 75 minut po nim. Planeta przez cały miesiąc wędruje około 1° na północ od gwiazdy 4. wielkości o Psc, sama mając blask $+5,7^m$, czyli nieco powyżej granicy widoczności gołym okiem. Lecz lornetka w tym przypadku również się sprawdzi. 9 września planeta spotka się z Księżycem w fazie 91%. Nad ranem oba ciała niebieskie dzieliło będzie 8° .

Na porannym niebie bardzo dobrze widoczna jest planeta Wenus, która zacznie miesiąc w Raku, niewiele ponad 1° na południe od znanej gromady otwartej gwiazd M44, ale już 10 września przejdzie do Lwa. 20 września planeta minie w odległości $28'$ najjaśniejszą gwiazdę Lwa, Regulusa, zaś dwa dni wcześniej z oboma ciałami niebieskimi spotka się Księżyc w fazie 5%. Regulus znajdzie się zaledwie $0,5$ stopnia od Księżyca (oprócz Sycylii zakrycie Regulusa będzie widoczne również w północno-wschodniej Afryce), natomiast Wenus świecić będzie $2,5$ stopnia nad nim. Tuż przed świtem w pierwszej połowie miesiąca bardzo blisko siebie znajdą się planety Mars i Merkury, które przedzieli Regulus, czyli najjaśniejsza gwiazda Lwa. 12 września Merkury osiągnie maksymalną elongację zachodnią, oddalając się na 18° od Słońca. Będzie to najlepszy okres widoczności tej planety na niebie porannym w ciągu całego 2017 roku. Merkury zacznie się pojawiać tuż przed świtem od 5 września, w dniu maksymalnej elongacji godzinę przed wschodem Słońca planeta zajmie pozycję na wysokości niecałych 6° nad wschodnim widnokregiem, potem zacznie zbliżać się do Słońca, ale pozostanie widoczna prawie do końca miesiąca. Merkury będzie najlepiej widoczny w drugiej części września, gdyż początkowo jego jasność nie będzie duża, zaledwie $+1,5^m$, lecz już 12 września jasność planety urośnie do $-0,2^m$, zaś 25 września – o kolejną wielkość gwiazdową. W tym samym czasie tarcza Merkurego zmaleje z 9 do 5 sekund kątowych, zaś faza urośnie z 17 do 90%. Podczas tego okresu widoczności Merkury świecić będzie

na tle gwiazdozbioru Lwa, niedaleko planety Mars. Przez cały ten okres jasność Marsa wyniesie $+1,8^m$. Planetarnej parze z nieco większej odległości przyglądać się będzie planeta Wenus. Początkowo obie planety na „M” będą bardzo nisko nad horyzontem, ale w kolejnych dniach zaczną się wspinać po niebie. 6 września, na początku widoczności Merkurego, kwadrans po godzinie 5, obie planety z Regulusem zajmą pozycję na wysokości niecałych 5° nad widnokregiem. Mars znajdzie się $48'$ na lewo od Regulusa, zaś Merkury – trzykrotnie dalej na prawo od niego. W kolejnych dniach pierwsza planeta od Słońca zakreśli na niebie fragment elipsy, oddalając się nieco od Regulusa i Marsa, nabierze blasku i odbędzie serię atrakcyjnych wizualnie i fotograficznie spotkań z różnymi ciałami niebieskimi. 10 września Merkury zbliży się ponownie do Regulusa, tym razem na odległość $40'$ (3° na wschód od niego znajdzie się Mars). Na 16 i 17 września pierwsza planeta od Słońca ma zaplanowane jeszcze bliższe spotkanie z Marsem. 16 września obie planety oddzieli dystans $30'$, natomiast dobę później będzie to tylko 18 minut kątowych, lecz Merkury przejdzie na drugą stronę Marsa. W kolejnych dwóch dniach parze planet towarzyszyć będzie Księżyc w fazie bardzo cienkiego sierpa. W Europie, gdy Księżyc pojawi się na nieboskłonie, będzie już po minięciu pierwszej planety od Słońca, natomiast mieszkańcy Filipin, Tajwanu, południowo-wschodnich Chin oraz wschodniej części Półwyspu Indochińskiego będą mogli obserwować zakrycie Merkurego przez Księżyc.

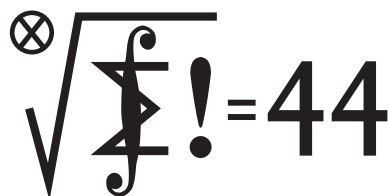
Ariel MAJCHER

Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2017

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 735 ($WT = 2,82$) i 736 ($WT = 2,08$) z numeru 2/2017

Patryk Jaśniewski	Gdańsk	40,94
Marcin Małogrosz	Warszawa	40,86
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	39,71
Roksana Słowik	Knurów	39,15
Adam Dzedzej	Gdańsk	39,12
Jerzy Cisło	Wrocław	37,87
Krzysztof Maziarz	Kraków	37,45
Marcin Kasperski	Warszawa	36,46
Janusz Olszewski	Warszawa	35,05

Zadania z matematyki nr 745, 746

Redaguje Marcin E. KUCZMA

745. Na obwodzie trójkąta ABC leżą cztery różne punkty K, L, P, Q : punkty K, L na boku AB , punkty P i Q odpowiednio na bokach BC i CA ; przy tym odcinki AP, BQ, CK i CL mają jednakową długość. Udowodnić, że środki tych czterech odcinków leżą na jednym okręgu.

746. Dana jest liczba naturalna $k \geq 2$. Czy istnieje rosnący ciąg liczb naturalnych (a_n) , którego żaden wyraz ani żadna suma skończenie wielu jego wyrazów nie jest k -tą potęgą liczby naturalnej, a przy tym ciąg $(\sqrt[k]{a_n})$ jest ograniczony?

Zadanie 746 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 5/2017

Przypominamy treść zadań:

741. Niech W będzie wielościanem wypukłym, środkowo-symetrycznym, i niech π będzie ustaloną płaszczyzną, przechodzącą przez środek symetrii. Przekrój wielościanu W płaszczyzną π jest zawarty w kole o promieniu r . Udowodnić, że przekrój wielościanu W każdą płaszczyzną, równoległą do π , jest zawarty w pewnym kole o promieniu r – lub podać przykład, pokazujący nieprawdziwość takiego stwierdzenia.

742. Niech p będzie liczbą pierwszą postaci $p = 4k + 1$. Dowieść, że istnieje liczba całkowita dodatnia s , mniejsza od p , dla której różnica $sp - \lfloor \sqrt{sp} \rfloor^2$ jest kwadratem liczby całkowitej dodatniej.

741. Banalny kontrprzykład: sześciian (o krawędzi a). Weźmy jego dwa przeciwległe wierzchołki A, B (końce przekątnej długości $a\sqrt{3}$). Płaszczyzna $\pi \perp AB$, przechodząca przez środek O , tworzy w przecięciu z sześcianiem sześciokąt foremny, którego wierzchołkami są środki niektórych krawędzi sześciianu, leżące w odległości $r = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ od środka O .

Przekrój sześciianu płaszczyzną $\pi' \parallel \pi$, przechodzącą przez trzy wierzchołki (połączone krawędziami np. z punktem A) jest trójkątem foremnym o boku $a\sqrt{2}$. Najmniejsze koło, zawierające ów trójkąt, ma promień $R = \frac{1}{3}a\sqrt{6} > r$.

742. Liczba pierwsza $p = 4k + 1$ jest sumą dwóch kwadratów (jedno z dobrze znanych twierdzeń Fermata): $p = a^2 + b^2$; liczby całkowite $a, b > 0$ muszą być względnie pierwsze. Istnieją wobec tego liczby całkowite x, y , dla których $ax + by = 1$, przy czym $|x| < b, |y| < a$ (łatwe uzasadnienie przez algorytm Euklidesa).

Wykażemy, że liczba $s = x^2 + y^2$ ma własności, o które chodzi w zadaniu. Mamy bowiem oszacowanie $s < a^2 + b^2 = p$ oraz równość

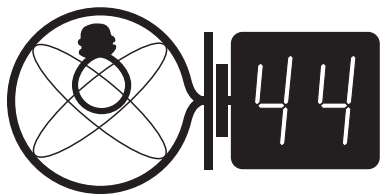
$$sp = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = 1 + (ay - bx)^2.$$

Widać z niej, że $\sqrt{sp} = |ay - bx|$. W konsekwencji $sp - \lfloor \sqrt{sp} \rfloor^2 = 1$; jest to niewątpliwie kwadrat liczby całkowitej dodatniej.

Uwaga. Zapewne innymi metodami także można uzyskać tezę zadania, niekoniecznie wzmocnioną do orzeczenia „... jest kwadratem jedynki”. Pan Tomasz Ordowski, który zadanie zaproponował, zwrócił uwagę na ciąg o wyrazach

$$a(n) = \min\{s \in \mathbb{Z} : s > 0, \exists m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : sn - \lfloor \sqrt{sn} \rfloor^2 = m^2\},$$

obecny w OEIS (oeis.org/A245474). Nie jest trudno wykazać, że dla liczb pierwszych postaci $p = 4k + 3$ zachodzi równość $a(p) = p$; natomiast dla liczb pierwszych $p = 4k + 1$ zachodzi nierówność $a(p) < p$, i to była treść naszego zadania; autorem podanego dowodu jest Robert Israel. (Dla liczb złożonych ciąg zachowuje się dość kapryśnie).

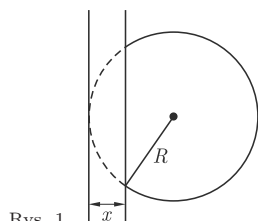


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2017

Zadania z fizyki nr 642, 643

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

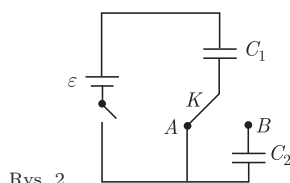
642. Piłka o promieniu R słabo uderza w ścianę i deformuje się, jak pokazano na rysunku 1. Deformacja x jest dużo mniejsza od promienia piłki i możemy przyjąć, że ciśnienie powietrza w piłce nie zmienia się podczas uderzenia. Zanedbując sprężystość powłoki, oszacować czas zderzenia piłki ze ścianą. Masa piłki wynosi m , ciśnienie powietrza w piłce p , ciśnienie atmosferyczne p_0 .



Rys. 1

643. Układ składający się z dwóch kondensatorów o tej samej pojemności ($C_1 = C_2$) i klucza K łączymy ze źródłem napięcia o sile elektromotorycznej ε (rys. 2). Wielokrotnie zmieniamy położenie klucza K , łącząc kondensator C_1 kolejno ze stykami A i B . Jak zmienia się napięcie na kondensatorze C_2 po każdym przełączeniu klucza? Rozważyć przypadki:

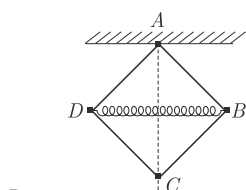
- w chwili dołączenia źródła napięcia klucza znajdował się w położeniu A ;
- w chwili dołączenia źródła napięcia klucza znajdował się w położeniu B .



Rys. 2

Przypominamy treść zadań:

638. Układ składa się z czterech jednakowych, lekkich prętów o długości l i lekkiej sprężyny o długości $2l$ (rys. 3). Pręty połączone są przegubowo za pomocą małych kulek o jednakowych masach. Układ zamocowany jest w punkcie A i znajduje się w polu ciężkości. W stanie równowagi pręty tworzą kwadrat. Znaleźć częstość małych drgań układu, przy których punkt C porusza się po linii pionowej.



Rys. 3

638. Rozważmy ruch układu w położeniu opisanym kątem α (rys. 4). Równania ruchu punktów B i C mają postać:

$$\begin{aligned} ma_{Cx} &= mg - 2F_1 \cos \alpha, \\ ma_{Bx} &= mg + F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \alpha, \\ ma_{By} &= F_s - F_1 \sin \alpha - F_2 \sin \alpha, \end{aligned}$$

gdzie m jest masą przegubu, a_{Cx} , a_{Bx} , a_{By} są przyspieszeniami punktów B i C , $F_s = 2kl(1 - \sin \alpha)$ jest siłą sprężystości. Eliminując z tych równań siły reakcji F_1 i F_2 , otrzymujemy

$$(1) \quad m(a_{Cx} + a_{Bx} - a_{By} \cos \alpha / \sin \alpha) = 2mg - (F_s \cos \alpha / \sin \alpha).$$

Współrzędne położenia punktów B i C spełniają związki

$$x_C = 2l \cos \alpha, \quad x_B = l \cos \alpha, \quad y_B = l \sin \alpha.$$

Stąd $a_{Bx} = a_{Cx}/2$. Dotychczasowe równania są słuszne dla dowolnego kąta α , ograniczymy teraz nasze rozważania do małych wychyleń z położenia równowagi, gdy $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$, $\Delta\alpha \ll \alpha_0$, $\alpha_0 = \pi/4$. Wtedy $\Delta y_B = l \cos \alpha_0 \Delta\alpha \approx l \cos \alpha_0 \Delta\alpha$, $\Delta x_C \approx -2l \sin \alpha_0 \Delta\alpha$, $a_{By} \approx -a_{Cx}/2$. W rozważanym przybliżeniu lewa strona równania (1) ma postać $L = 2ma_{Cx}$. W stanie równowagi $a_{Cx} = 0$, stąd

$$(2) \quad 2mg = F_s(\alpha_0) \cos \alpha_0 / \sin \alpha_0 = 2kl(1 - \sqrt{2}/2).$$

Prawa strona równania (1) ma postać

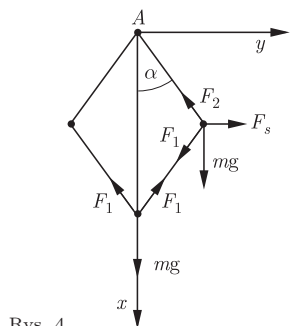
$$P = 2kl(\cos \alpha_0 / \sin \alpha_0 - \cos \alpha / \sin \alpha) - 2kl(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) = 2kl\Delta\alpha / \sin^2 \alpha_0 - k\Delta x_C.$$

Uwzględniając, że $\Delta\alpha = -\Delta x_C / (2l \sin \alpha_0)$, otrzymujemy równanie ruchu punktu C dla małych wychyleń z położenia równowagi:

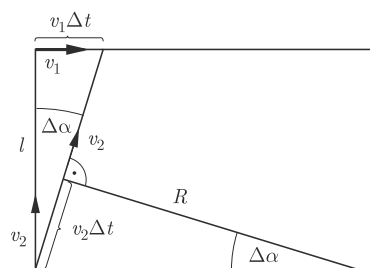
$$a_{Cx} + \Delta x_C (1 / \sin^3 \alpha_0 - 1) k / 2m = 0,$$

gdzie zgodnie z (2) $k/m = 2g / (l(2 - \sqrt{2}))$. Szukana częstość drgań wynosi

$$\omega = \sqrt{g(2\sqrt{2} - 1) / (l(2 - \sqrt{2}))}.$$



Rys. 4



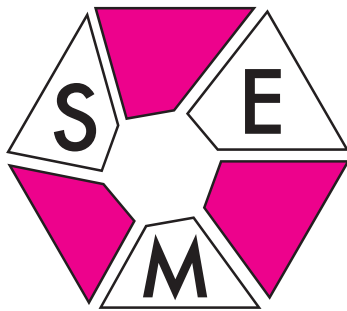
Rys. 5

639. Ponieważ prędkość psa ma stałą wartość, jego przyspieszenie jest prostopadłe do wektora prędkości i ma wartość $a = v_2^2/R$, gdzie R jest promieniem krzywizny toru w danym miejscu. W bardzo krótkim czasie Δt wektor prędkości psa obraca się o kąt α dany wzorem $\alpha = v_2 \Delta t / R$ (rys. 5).

W tym samym czasie lis przebywa drogę $v_1 \Delta t = \alpha l$, gdyż wektor prędkości psa skierowany jest cały czas na lisa. Stąd $R = v_2 l / v_1$. Szukana wartość przyspieszenia wynosi $a = v_1 v_2 / l$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 634 ($WT = 1,15$), 635 ($WT = 3,25$) z numeru 3/2017

Jan Zambrzycki	Białystok	38,38
Marian Łupieżowicz	Gliwice	38,33
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	29,80
Ryszard Woźniak	Kraków	28,77



sem.edu.pl

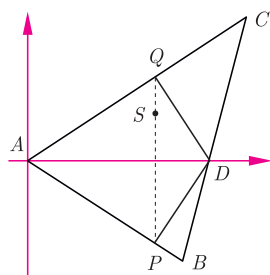
LXVIII OM

W LXVIII Olimpiadzie Matematycznej uczestniczyło 1495 uczniów, zatem o 324 osoby więcej niż rok wcześniej, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 632 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 154 uczniów. Zapewne wynika to z pojawienia się w pierwszym stopniu sporej liczby zadań stosunkowo łatwych, a już na pewno niewymagających szczególnego przygotowania. Dotyczy to również zadania 4 z pierwszego stopnia, którego rozwiązania nadesłały 1152 osoby, w tym 707 poprawne – zadania, które rozwiązać można, po prostu stosując popularne w szkołach metody pozbywania się wartości bezwzględnych. To czasochłonne, ale w zadaniu domowym wykonalne. Najtrudniejszym zadaniem spośród rozwiązywanych w domu okazało się zadanie 11 (geometria płaska) – rozwiązało je 388 uczniów. Najłatwiejsze było zadanie 2 rozwiązane przez 1441 startujących.

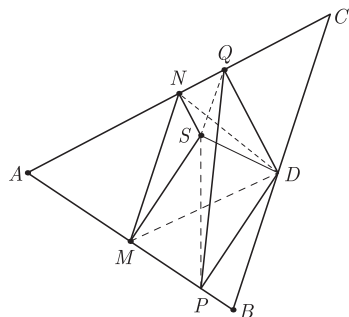
Zawody okręgowe były znacznie trudniejsze niż rok wcześniej. Najtrudniejsze było zadanie 6 (klasyczna teoria liczb). Zaskoczyły mnie wyniki zadania drugiego (rozwiązanie poniżej) rozwiązane przez 60 osób, poniżej 10% startujących – spodziewałem się znacznie większej liczby poprawnych rozwiązań. Do finału dopuściliśmy tych uczniów, którzy uzyskali co najmniej 10 punktów, co w zasadzie oznaczało rozwiązanie dwóch zadań. Finał też nie był łatwy. Zadania trzeciego nie rozwiązał nikt, choć oczekiwaliśmy kilku rozwiązań. Trudne też było zadanie ostatnie, któremu radę dały trzy osoby, a zadaniu piątemu – osób 9. Prawie wszyscy ci, którzy rozwiązali zadanie 5, korzystali z pojęć związanych z geometrią rzutową, co w tym przypadku było spodziewane.

Ustalając składy reprezentacji Polski na Olimpiadę Międzynarodową i inne zawody, korzystaliśmy z wyników zawodów okręgowych, bo sam finał nie rozróżniał laureatów, którzy uzyskali 18 punktów. Szesnastu finalistów (około 10,5%) nie rozwiązało żadnego zadania, w drugim stopniu 124 osoby otrzymały 0 za wszystkie zadania.

Dodać wypada, że wielu uczniów źle zrozumiało zadanie piąte. Powinienem być pomyślc, że zawodnicy mogą treść (jednoznaczna dla zawodowego matematyka) zinterpretować opacznie, co się, niestety, stało, choć czołowi zawodnicy tej OM zrozumieli ją właściwie. Trudno mi powstrzymać się od komentarza na temat geometrii.



Oto dowód (gimnazjalisty!) bez założenia, że AD jest dwusieczną.
 $MA = MB = \frac{1}{2}AB$, $NA = NC = \frac{1}{2}AC$,
 S to środek okręgu opisanego na ABC .
 $SM \parallel DP$, $SN \parallel DQ$, więc
 $[MSP] = [MSD]$ i $[QNS] = [NSD]$. Stąd
 $[AQS] = [AMN] + [MDN] =$
 $= [AMN] + [MCN] = [ACM] = \frac{1}{2}[ABC]$.



Jeśli S leży na PQ , to
 $[APQ] = [APSQ] = \frac{1}{2}[ABC]$,
zatem $[BCPQ] = \frac{1}{2}[ABC]$,
czyli $[APQ] = [BCPQ]$,
jeśli S leży wewnątrz $\triangle APQ$, to
 $[APQ] > \frac{1}{2}[ABC]$,
jeśli S leży na zewnątrz $\triangle APQ$, to
 $[APQ] < \frac{1}{2}[ABC]$.

Uczestnicy OM radzą sobie z nią, gdy da się coś zauważyć i otrzymać krótkie rozwiązanie, często pomysłowe. Zdarza się jednak, że do głowy nic nie przychodzi, a czas goni. Próbują wtedy rozwiązania analitycznego; na ogół bez powodzenia. Tym razem było inaczej.

Spójrzmy na zadanie drugie z zawodów II stopnia ubiegłej OM.

W trójkącie ostrokątnym ABC dwusieczna kąta BAC przecina bok BC w punkcie D . Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu D odpowiednio na proste AB i AC . Dowieść, że pole trójkąta APQ jest równe połowie czworokąta $BCQP$ wtedy i tylko wtedy, gdy środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leży na prostej PQ .

Rozwiążemy je analitycznie, prawie bezmyślnie. Należy sensownie wybrać układ współrzędnych. Niech osią OX będzie prosta AD i niech $A = (0, 0)$. Niech $k > 0$ będzie współczynnikiem kierunkowym prostej AC . Prosta AB opisuje wtedy równanie $y = -kx$. Niech $B = (b, -kb)$, $C = (c, kc)$, gdzie $b, c > 0$. Równaniem prostej BC jest: $k(c+b)x + (b-c)y = 2kbc$. Jeśli $y = 0$, to $x = \frac{2bc}{c+b}$, więc $D = (\frac{2bc}{c+b}, 0)$.

Prosta prostopadła do AC , przechodząca przez punkt D , ma równanie $x + ky = \frac{2bc}{c+b}$.

Gdy $y = kx$, to $x = \frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}$, więc $Q = (\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}, \frac{2bck}{(c+b)(1+k^2)}) = \frac{2b}{(c+b)(1+k^2)}C$.

Podobnie $P = (\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}, \frac{-2bck}{(c+b)(1+k^2)}) = \frac{2c}{(c+b)(1+k^2)}B$. Równaniem prostej PQ jest więc $x = \frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)}$.

Środek S okręgu opisanego na trójkącie ABC to punkt wspólny symetrycznych odcinków AB i AC , więc prostych o równaniach $x - ky = \frac{b}{2}(1+k^2)$

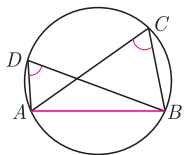
i $x + ky = \frac{c}{2}(1+k^2)$. Dodając te równania stronami i dzieląc wynik przez 2, otrzymujemy $x = \frac{(c+b)(1+k^2)}{4}$. Punkt S leży na prostej PQ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{2bc}{(c+b)(1+k^2)} = \frac{(c+b)(1+k^2)}{4}, \text{ czyli } (c+b)^2(1+k^2)^2 = 8bc.$$

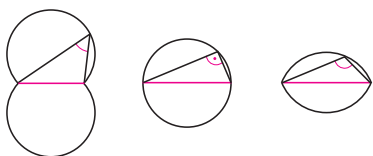
Pole trójkąta PQA jest połową pola trójkąta BCA wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{2c}{(c+b)(1+k^2)} \cdot \frac{2b}{(c+b)(1+k^2)} = \frac{1}{2}$, więc $(c+b)^2(1+k^2)^2 = 8bc$, co kończy dowód.

Dodajmy, że teza jest prawdziwa bez założenia, że odcinek AD jest dwusieczną kąta BAC . Wystarczy, by punkt D leżał na odcinku BC , co kilkunastu uczestników OM udowodniło w czasie zawodów i od nich tego się dowiedziałem w czasie omówienia zadań po zawodach (patrz margines). Jak zwykle wśród uczestników olimpiady są tacy, którzy widzą więcej niż układający zadania.

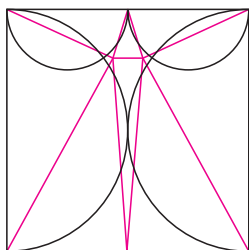
Michał KRYCH



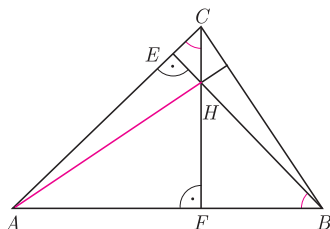
Rys. 1



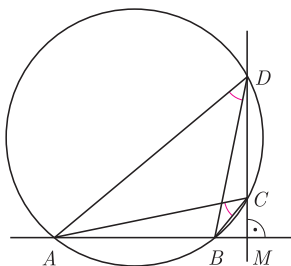
Rys. 2. $\alpha < 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $\alpha > 90^\circ$



Rys. 3. Na mniej niż 8 się nie da – dowód znaleźć można w *Delcie* 1/2002.



Rys. 4. Inne rozwiązanie opisano w *deltoïdzie* 9/2012. Teza zachodzi także dla trójkąta rozwartokątnego.



Rys. 5

Polecam też zadanie 7 z *deltoïdu* 7/2016.

Zadanie 4 jest modyfikacją zadania z XXV Olimpiady Matematycznej. Więcej o nim m.in. w *Delcie* 5/1986.

Odcinek AB widać z punktu C pod kątem α , gdy $\sphericalangle ACB = \alpha$. Z twierdzenia o kątach wpisanych wynika, że jeśli punkty C i D leżą na okręgu po tej samej stronie jego cięciwy AB , to widać ją z C i D pod tym samym kątem (rys. 1).

Dla danego odcinka AB i kąta $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ zbiór punktów płaszczyzny, z których widać AB pod kątem α to dwa przystające łuki okręgów jak na rysunku 2, zwane *łukami Talesa*. Ponadto z punktów na zewnątrz łuków odcinek AB widać pod kątem mniejszym od α , a z punktów wewnątrz – pod większym.

1. Rozstrzygnij, czy istnieje takich 100 punktów na płaszczyźnie, z których każde trzy są wierzchołkami trójkąta rozwartokątnego.
2. Podziel kwadrat na 8 trójkątów ostrokątnych.
3. Punkt H jest ortocentrum trójkąta ostrokątnego ABC . Wykaż, że okręgi opisane na trójkątach ABH i ACH są przystające.
4. W czworoboku $ABCD$ krawędź AB jest prostopadła do krawędzi CD i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$. Rozstrzygnij, czy oznacza to, że płaszczyzna wyznaczona przez krawędź AB i środek krawędzi CD jest prostopadła do krawędzi CD .

Rozwiązania

R1. Wybierzmy 100 punktów na półokręgu bez końców. Wówczas dla dowolnej trójki z nich odcinek utworzony przez dwa skrajne widać ze środkowego pod kątem rozwartym (wpisanym w okrąg i opartym na łuku dłuższym od półokręgu). \square

R2. Rozwiązanie przedstawia rysunek 3. Pozostawiam Czytelnikowi sprawdzenie, że wszystkie trójkąty istotnie są ostrokątne. Pomocny bywa fakt, że ich wierzchołki są na zewnątrz odpowiednich półokręgów (czyli łuków Talesa dla kąta 90°). \square

R3. Niech E, F będą spodkami wysokości odpowiednio z B i C (rys. 4). Trójkąty prostokątne ABE i ACF są podobne, bo mają wspólny kąt przy wierzchołku A . Stąd z punktów B i C widać odcinek AH pod tym samym kątem, leżą więc one na przystających łukach okręgów opisanych na trójkątach ABH i ACH . \square

R4. Jeśli postulowana w zadaniu prostopadłość ma miejsce, to punkty C i D , a więc też trójkąty ABC i ABD , są symetryczne względem opisanej płaszczyzny, zatem przystające. Wykażemy, że tak być nie musi.

Niech punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu w tej właśnie kolejności, przy czym $AB \perp CD$, a M to punkt przecięcia tych prostych (rys. 5). Wówczas trójkąty ABC, ABD nie są przystające (mają różne wysokości na AB , więc też różne pola). Jednocześnie $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB$.

Jeśli teraz obrócimy trójkąt ABD wokół prostej AB o pewien dodatni kąt mniejszy od 180° , otrzymamy czworobok $ABCD$, w którym $CM \perp AB \perp DM$. Wobec tego prosta AB jest prostopadła do płaszczyzny CDM , a więc także do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie. Stąd $AB \perp CD$ także po opisanym obrocie. Uzyskaliśmy więc czworobok $ABCD$ spełniający warunki zadania, w którym trójkąty ABC i ABD nie są przystające. \square

Zadania domowe

5. Skonstruuj trójkąt ABC , mając dane punkty A, B , kąt przy wierzchołku C oraz długość środkowej CM . Ile rozwiązań może mieć to zadanie?

Wskazówka. Zadanie może mieć nieskończenie wiele rozwiązań.

6. Punkty A i B należą do wnętrza kąta ostrego α . Skonstruuj taki trójkąt równoramienny, aby punkty A i B należały do różnych jego ramion, aby podstawa tego trójkąta była zawarta w jednym z ramion kąta α , a wierzchołek należał do drugiego z ramion.

Wskazówka. Odbij punkt A symetrycznie w jednym z ramion kąta, otrzymując A' , narysuj łuk Talesa dla odcinka $A'B$ i kąta $180^\circ - 2\alpha$ i rozważ odpowiedni jego punkt przecięcia z wybranym wcześniej ramieniem kąta.

7. Udowodnij stwierdzenia z drugiego akapitu niniejszego artykułu.