Warto (się) rozwijać

Joanna JASZUŃSKA

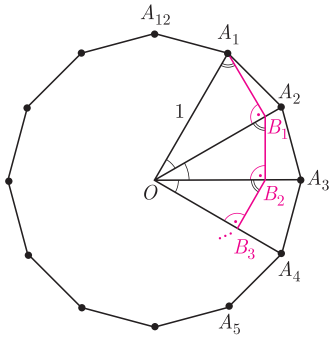
Jeśli chcemy wyznaczyć długość pewnej krzywej lub łamanej, często warto ją rozwinąć albo w inny sposób rozprostować.

1. Winorośl wyrasta u podnóża drzewa i pnąc się równomiernie, owija jego pień siedmiokrotnie. Obwód pnia jest równy 3 m, a winorośl dorasta do wysokości 20 m. Jaka jest jej długość?

2. Okrąg O_1 jest wpisany w trójkąt ABC, w którym $AB = 10$ i $AC = BC = 13$. Okręgi $O_2, O_3, O_4, \ldots$ są styczne do boków AC, BC oraz dla każdego $n \geqslant 2$ okrąg O_n jest styczny zewnętrznie do okręgów O_{n-1} i O_{n+1}. Wyznacz sumę obwodów wszystkich okręgów $O_1, O_2, O_3, \ldots$

3. Dany jest dwunastokąt foremny $A_1A_2A_3\ldots A_{12}$ o środku O, przy czym $OA_1 = 1$. Punkt B_1 jest rzutem A_1 na odcinek OA_2, punkt B_2 jest rzutem B_1 na OA_3, punkt B_3 jest rzutem B_2 na OA_4 itd. (rys. 1). Wyznacz długość łamanej $A_1B_1B_2B_3\ldots$

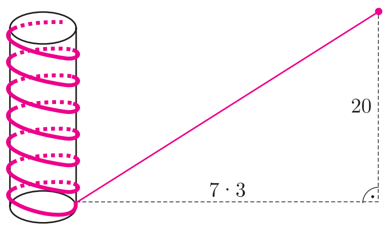
4. Kolejne wierzchołki pewnego czworokąta leżą na kolejnych bokach kwadratu o boku 2,5. Wykaż, że obwód tego czworokąta jest większy od 7.



Rys. 1

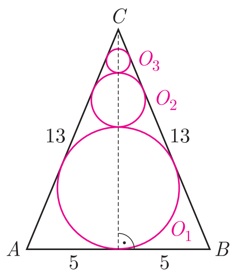
Rozwiązania

R1. Przetoczmy pień o siedem pełnych obrotów tak, by odwinąć z niego winorośl. Skoro pięła się ona równomiernie, to po takim rozwinięciu utworzy prosty odcinek, będący przeciwprostokątną trójkąta o przyprostokątnych 20 m i $7 \cdot 3$ m $= 21$ m (rys. 2). Stąd na mocy twierdzenia Pitagorasa długość winorośli to 29 m. $\square$



Rys. 2

R2. Suma długości średnic danych okręgów równa jest wysokości trójkąta poprowadzonej z wierzchołka C (rys. 3), która z kolei z twierdzenia Pitagorasa ma długość 12. Okrąg o średnicy $2r$ ma obwód $2\pi r$, zatem szukana suma obwodów wszystkich okręgów to 12π. $\square$

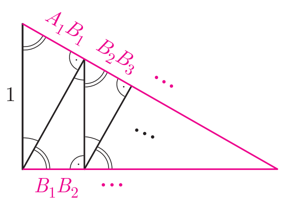


Rys. 3

R3. Trójkąty OA_1B_1 oraz OB_iB_{i+1} mają kąty po $30°, 60°, 90°$, gdyż każdy z nich z założenia jest prostokątny i ma kąt $360°/12 = 30°$. Można wobec tego ułożyć je w sposób przedstawiony na rysunku 4. Kąt pomiędzy sąsiadującymi teraz odcinkami rozważanej łamanej jest wówczas równy $90° + 30° + 60° = 180°$.

Stąd otrzymana figura także jest trójkątem o kątach $30°, 60°, 90°$, przy czym jedna jego przyprostokątna ma długość 1, a suma pozostałych dwóch boków to szukana długość łamanej. Jest ona wobec tego równa $2 + \sqrt{3}$, gdyż trójkąt ten jest połową trójkąta równobocznego o boku 2. $\square$

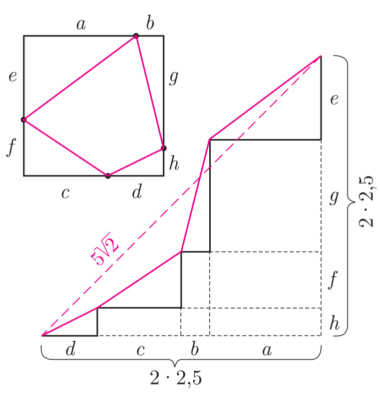
Zadanie można też rozwiązać, sumując szereg $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \ldots$



Rys. 4

R4. Przestawmy fragmenty kwadratu tak, jak na rysunku 5. Obwód rozważanego czworokąta to teraz długość kolorowej łamanej. Jest ona nie mniejsza od odcinka łączącego jej końce, czyli od $5\sqrt{2}$, co z kolei jest większe od 7. $\square$

O innych zastosowaniach podobnych obrazków przeczytać można w *deltoidzie* 1/2012.



Rys. 5

Zadania domowe

5. Na stole stoi stożek, w pewnym jego punkcie siedzi pająk. Chciałby on przespacerować się najkrótszą możliwą drogą dookoła stożka i wrócić do punktu wyjścia. Którędy powinien pójść?

6. Na stole stoi szklanka, jej dno jest lepkie od soku. W pewnym miejscu wewnątrz siedzi mucha, w innym pająk. Pająk chce dotrzeć do muchy najkrótszą możliwą drogą, ale omijając sok. Którędy powinien pójść? W jaki sposób zmieni się rozwiązanie, jeśli mucha siedzi wewnątrz, a pająk na zewnątrz szklanki?

Wskazówki do zadań 5 i 6. Warto rozciąć i rozwinąć daną powierzchnię boczną. Nie zawsze jednak najkrótsza droga odpowiada odcinkowi łączącemu odpowiednie dwa punkty tak uzyskanej płaskiej figury! Ku przestrodze polecam *deltoid* 7/2015.