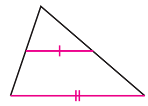
Niby nic

Joanna JASZUŃSKA

W dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do trzeciego boku i dwukrotnie od niego krótszy. Ten prosty fakt okazuje się zadziwiająco przydatny.



1. Punkty X, Y są środkami odpowiednio boków AD i BC czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnij, że $XY \leqslant \frac{1}{2}(AB + CD)$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $AB \parallel CD$.

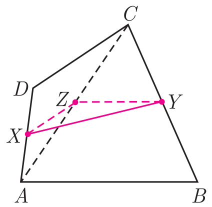
2. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF. Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

3. Przekątne AC i BD czworokąta wypukłego $ABCD$ są równej długości. Punkty E i F są odpowiednio środkami boków AD i BC. Udowodnij, że prosta EF tworzy równe kąty z przekątnymi AC i BD.

4. Czworokąt $ABCD$ nie jest równoległobokiem oraz $AB = CD$. Punkty E i F są odpowiednio środkami przekątnych AC i BD. Wykaż, że rzuty prostopadłe odcinków AB i CD na prostą EF są równej długości.

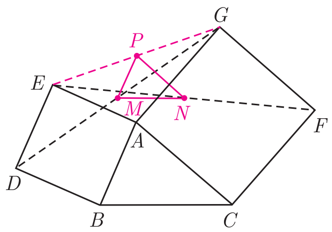
5. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ o polu 1 punkty K, L, M, N, O, P są środkami odpowiednio przekątnych AC, BD, CE, DF, EA, FB i tworzą sześciokąt wypukły $KLMNOP$. Wyznacz jego pole.

Rozwiązania



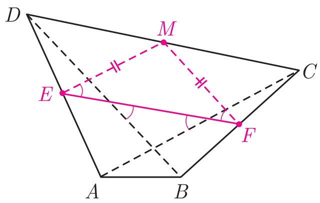
Rys. 1

R1. Niech Z będzie środkiem przekątnej AC (rys. 1). Wówczas $XZ \parallel CD$, $XZ = \frac{1}{2}CD$, $ZY \parallel AB$ oraz $ZY = \frac{1}{2}AB$. Stąd na mocy nierówności trójkąta dla punktów X, Y, Z mamy $XY \leqslant XZ + ZY = \frac{1}{2}(AB + CD)$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $XZ \parallel ZY$, czyli gdy $AB \parallel CD$. $\square$



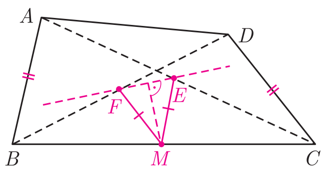
Rys. 2

R2. Niech P będzie środkiem odcinka EG (rys. 2). Wówczas $PM \parallel ED \parallel AB$, $PM = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}AB$, $PN \parallel GF \parallel AC$ oraz $PN = \frac{1}{2}GF = \frac{1}{2}AC$. Wobec tego trójkąty PMN i ABC są podobne w skali $1:2$, a więc $MN : BC = 1:2$. $\square$



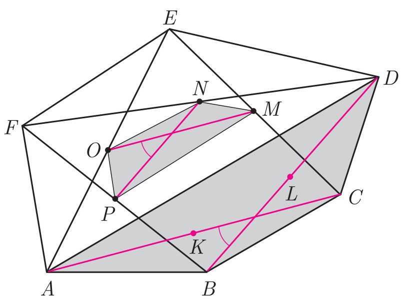
Rys. 3

R3. Oznaczmy środek boku CD przez M (rys. 3). Wówczas $ME = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD = MF$. Wobec tego trójkąt MEF jest równoramienny i podstawa EF tworzy równe kąty z bokami ME i MF. Jednocześnie $ME \parallel AC$ oraz $MF \parallel BD$, co kończy dowód. $\square$



Rys. 4

R4. Niech M będzie środkiem boku BC. Wówczas $ME \parallel AB$, $MF \parallel CD$ oraz $ME = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = MF$ (rys. 4). Wobec tego trójkąt MEF jest równoramienny ($E \neq F$, gdyż $ABCD$ nie jest równoległobokiem). Stąd rzut M na prostą EF jest środkiem podstawy EF, a więc rzuty boków ME i MF na prostą EF są równej długości jako połówki podstawy. Wobec tego również dwukrotnie od nich dłuższe rzuty odcinków AB i CD są równej długości. $\square$



Rys. 5. $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$.

R5. Niech α oznacza miarę nie większego z kątów pomiędzy przekątnymi AC i BD, wówczas $[ABCD] = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$ (rys. 5). Jednocześnie $MO \parallel AC$, $MO = \frac{1}{2}AC$, $NP \parallel BD$ oraz $NP = \frac{1}{2}BD$, zatem kąt pomiędzy odcinkami MO i NP także jest równy α oraz

$$[MNOP] = \frac{1}{2}MO \cdot NP \cdot \sin\alpha = \frac{1}{8}AC \cdot BD \cdot \sin\alpha = \frac{1}{4}[ABCD].$$

Analogicznie $[PKLM] = \frac{1}{4}[DEFA]$, stąd $[KLMNOP] = \frac{1}{4}[ABCDEF] = \frac{1}{4}$. $\square$

Zadania domowe

6. Niech K, L, M, N będą środkami kolejnych boków czworokąta $ABCD$. Wykaż, że $KLMN$ jest równoległobokiem, że $AC \perp BD \Leftrightarrow KM = LN$, że $AC = BD \Leftrightarrow KM \perp LN$ oraz wyznacz stosunek pól $[KLMN] : [ABCD]$.

7. Dany jest trójkąt ABC o bokach $AB = 2$ oraz $AC = BC = 3$. Punkt K jest środkiem boku BC, punkt L leży na boku AC oraz $KL = 1$. Wyznacz długość odcinka AL.

Wskazówka. $AL = \frac{3}{2}$ to tylko jedna z możliwości.

Zadanie 2 pochodzi z LIII Olimpiady Matematycznej, dwa inne rozwiązania opisano w *deltoidach* 17 i 29 (*Delta* 5/2009 i *Delta* 5/2011.