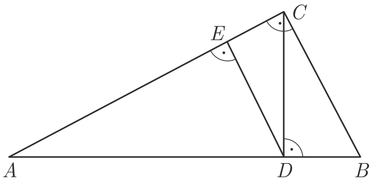
# Analiza Starożytnych i Cyprian Norwid

*Marek KORDOS*

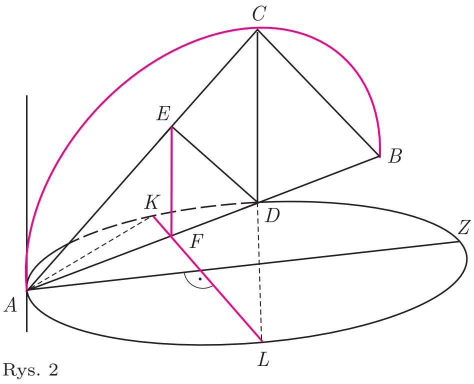



Rys. 1,
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}.$$

*Podwojenie sześcianu* to zadanie: skonstruuj odcinek $\sqrt[3]{2}$ razy dłuższy od danego.

W języku arytmetyki będzie to brzmiało: znajdź *dwie średnie proporcjonalne* dla $a$ i $2a$. Dwie średnie proporcjonalne dla $a$ i $b$ to takie liczby $x$ i $y$, że
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$
Przykład geometrycznej realizacji jest na rysunku 1.

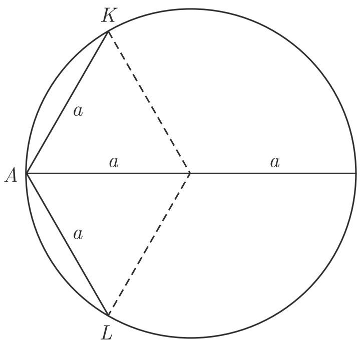
Podwojenie sześcianu byłoby zrealizowane, gdybyśmy umieli narysować taką konstrukcję dla $b = 2a$. Wtedy bowiem
$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}, \text{ czyli } \left(y = \frac{x^2}{a} \text{ i } y^2 = 2ax\right), \text{ czyli } \frac{x^4}{a^2} = 2ax, \text{ czyli } x^3 = 2a^3.$$
Archytas z Tarentu postanowił tę konstrukcję zrealizować, posługując się metodą nazwaną później *analizą Starożytnych.* Polega ona na przyjęciu założenia, że mamy żądany obiekt i badaniu jego jak najliczniejszych własności w nadziei na to, że może któreś ze znalezionych pozwolą ten obiekt skonstruować.




Rys. 2

Pomysł Archytasa polegał na wskazaniu żądanych punktów w przecięciu trzech znanych powierzchni, czyli nie na płaszczyźnie, lecz w przestrzeni. W tym celu wyposażył rysunek 1 wykonany dla $AB = 2AE$ w półokrąg o średnicy $AB$, czyli o promieniu $a$. Na płaszczyźnie narysował okrąg $o$ o promieniu $a$ i na nim, prostopadle do płaszczyzny umieścił figurę z rysunku 1 w taki sposób, by punkty $A$ i $D$ znajdowały się na $o$. Oznaczmy jeszcze przez $Z$ przeciwny do $A$ koniec średnicy $o$. Następnie z $E$ opuśćmy wysokość na $AB$ otrzymując $F$ i przez ten punkt poprowadźmy prostopadłą do $AZ$ – jej przecięcia z $o$ to $K$ i $L$. Zauważmy, że
$$EF^2 = AF \cdot FD = KF \cdot FL.$$

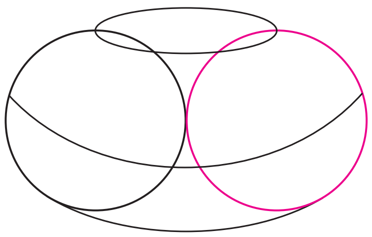
Pierwsza równość wynika z tego, że w trójkącie prostokątnym $AED$ wysokość jest średnią geometryczną odcinków, na jakie dzieli przyprostokątną. Druga równość wynika z podobieństwa trójkątów $AFK$ i $LFD$. Nieoczekiwany wniosek to fakt, że trójkąt $KEL$ okazuje się prostokątny (jako, że jego wysokość jest średnią geometryczną odcinków na jakie dzieli $KL$).




Rys. 3

Wyobraźmy sobie teraz okrąg opisany na $KEL$, którego średnicą jest $KL$. Leży on w płaszczyźnie prostopadłej do $AZ$. Zatem wszystkie z punktów $K$, $L$, $E$, $C$ leżą na powierzchni stożka o osi $AZ$. Kąt pomiędzy osią a tworzącymi stożka to $60°$, bo $AK = AL = AE = a$ (patrz rysunek 3).

Koniec rozumowania Archytasa jest taki. Punkt $C$ można zlokalizować, zauważając, że poza tym, iż leży on na stożku, leży on także na walcu o tworzących przecinających okrąg $o$ i prostopadłych do jego płaszczyzny oraz na „torusie bez dziurki" – tę ostatnią powierzchnię otrzymamy, uzupełniając półokrąg opisany na $ABC$ do okręgu i obracając go dokoła tej tworzącej walca, która przechodzi przez $A$.



Rys. 4

A lokalizacja $C$ pozwala na skonstruowanie trójkąta $ABC$. Wtedy $AD = \sqrt[3]{2} \cdot AE$.

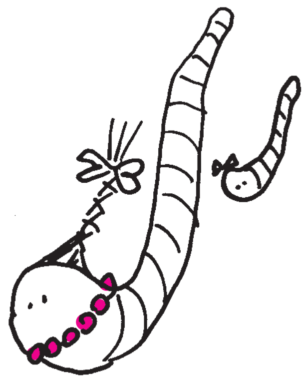
Zapewne wielu zauważy, że to jakby zupełnie coś innego, niż to, co chcemy uznawać za konstrukcję. Wynika z tego pytanie, jak to się stało, że dziś dla nas konstrukcja musi być wykonywana na płaszczyźnie i to wyłącznie cyrklem i linijką. Czyżby znalazł się dyktator, który to zarządził? Z przykrością należy odpowiedzieć: TAK.

Po upowszechnieniu konstrukcji Archytasa z filipiką przeciw niemu (no, może nie z filipiką, bo mowy Demostenesa miały miejsce później) wystąpił Platon.

Stwierdził, że używanie do konstrukcji struktur przestrzennych, a zwłaszcza powstających mechanicznie, urąga matematyce, która na czystej kontemplacji polegać powinna (to wziął dwa tysiąclecia później pod uwagę Nobel i tym uzasadnił nieprzyznanie matematykom nagrody). A czysta kontemplacja powinna operować jedynie tak ulotnym i niepraktycznym obiektem, jak – nieistniejąca przecież realnie – płaszczyzna i manipulować wyłącznie liniami doskonałymi, a więc w każdym punkcie jednakimi, jakimi na płaszczyźnie są jedynie proste i okręgi.

O dziwo, ta argumentacja okazała się przekonywająca i matematycy pokornie przyjęli dyktat Platona. Samo zaś rozważanie przeciwstawienia czystej kontemplacji, jaką powinna być nauka, ponurej praktyczności (jakby Elojów Morlokom) uznane zostało za niezbędny element wykształcenia kulturalnego człowieka i było nauczane aż do I wojny światowej nawet w gimnazjach klasycznych, gdzie matematyka była obecna tylko śladowo.

Dokumentem takich rozważań jest wiersz Cypriana Norwida poświęcony zadumie nad zdegradowaniem kontemplacji.



## PLATO I ARCHITA

**ARCHITA**
*Geometrycznej nieświadom nauki*
*Widziałem prosty lud, kładący bruki,*
*I, jako kamień jedna się z kamieniem,*
*Baczyłem, stojąc pod filarów cieniem –*
*Aż żal mi było bezwiedności gminu,*
*Mimo że wieczną on jest wagą czynu!...*
*Więc – Geometrii myślane promienie*
*(Rzeknę) gdy z głazem złączę i ożenię,*
*Sferyczność w drzewie wykłuwszy toporem*
*Siłami ramion pchnę brązowe walce,*
*Promienne jeśli kołom natknę palce...*
*To – któż wie...*

**PLATO**
*Boskie zmysłowiąc obrysy,*
*Archito! – koturn rzucisz za kulisy –*
*Języka lotność niebieskiego zgrubisz*,*
*Więc Filozofię, Grecję może, zgubisz...*

*Idealność Platona była przeciwną rodzącej się właśnie mechanice, uważając ją (w pierwotnym jej ekstremie) jako zdegradowanie kontemplacji
(*przypis Poety*)

**ARCHITA**
*O! Plato... padam przed prawdy bez-końcem,*
*I nieraz, myśli z drzewa ciosząc, płaczę,*
*Tak wielce wszystko przesiąkłe jest słońcem,*
*Któremu nie ty, ni ja biegów znaczę;*
*Dlatego świętych nie zniżę arkanów,*
*Ani ojczyzny krągłą tarcz wyszczerbię,*
*Owszem: z tych, które rażą cię dziś, planów,*
*Z kres tych na Grecji idealnym herbie,*
*Z liczebnych równań w sił zmienionych dźwignie*
*(Lubo promienność uroku w nich stygnie),*
*Któż wie? – powtarzam – czy lud w sobie drobny,*
*Bezsilny ciałem – jak wyspa osobny,*
*Sykulów mówię, na przykład, siedziba**,*
*Tą siły ramion zmnożywszy nauką,*
*Nie zdoła bronić się jak morska ryba?...*

**To się odnosi do przyszłości już wyraźniejszej mechaniki, której Archimed na rzecz ojczyzny zażył
(*przypis Poety*)

**PLATO**
*Przyjdzie – i tobie dzień zwycięstwa – sztuko!...*