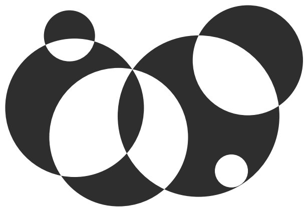
Czarno-białe mapy

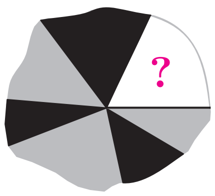
Joanna JASZUŃSKA

Przyjmuje się szereg założeń gwarantujących „przyzwoitość” mapy, m.in. że każde państwo jest w jednym kawałku.

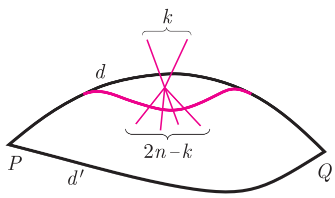
Kraje uważamy za *sąsiednie*, gdy ich granica zawiera łuk jakiejś krzywej. Punkty granic, w których schodzą się więcej niż dwa kraje, nazywamy *wierzchołkami* mapy, a liczbę odcinków granic w takim punkcie — *stopniem* wierzchołka.



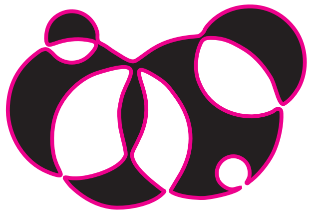
Rys. 1



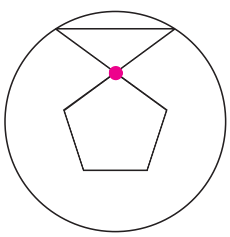
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4. Przekształcona mapa z rysunku 1.



Rys. 5

Słynne twierdzenie orzeka, że każdą mapę da się pomalować najwyżej czterema barwami. Oczywiście, zawsze należy malować tak, by sąsiadujące ze sobą państwa miały różne kolory. Są jednak mapy, dla których wystarczy mniej barw.

1. Na kartce narysowano pewną liczbę okręgów. Udowodnij, że uzyskaną w ten sposób mapę można pomalować dwoma kolorami (rys. 1).

2. W pewnym wierzchołku mapy spotykają się dokładnie trzy państwa. Czy oznacza to, że mapy tej nie da się pomalować dwoma kolorami?

Zauważmy, że jeśli mapa ma wierzchołek nieparzystego stopnia, to do pomalowania schodzących się w nim krajów nie wystarczą dwa kolory (rys. 2).

Twierdzenie. *Mapę można pomalować dwoma kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej wierzchołek jest stopnia parzystego.*

Dowód w jedną stronę wynika z powyższej obserwacji.

Dla dowodu drugiej implikacji rozważmy mapę, której każdy wierzchołek ma stopień parzysty. Pomalujmy dowolnie wybrany kraj P na czarno. Następnie każdy inny kraj Q połączmy z P dowolną drogą nieprzechodzącą przez wierzchołki mapy i pomalujmy też na czarno, jeśli droga ta przekracza parzystą liczbę granic, lub na biało, jeśli nieparzystą. Aby zakończyć dowód, należy wykazać, że kolor państwa Q nie zależy od wyboru drogi.

Rozważmy dwie różne drogi d i d' i deformujmy d do d', „mijając” kolejne wierzchołki jak na rysunku 3. Dla wierzchołka stopnia $2n$ droga, zamiast pewnych k krawędzi z niego wychodzących, przecina po deformacji pozostałych $2n-k$ jego krawędzi. Liczby te są tej samej parzystości, zatem taka zmiana nie wpływa na kolor państwa Q. Stąd faktycznie kolor ten nie zależy od wyboru drogi. $\square$

3. *Bazgroł* to narysowana ołówkiem na kartce ciągła krzywa zamknięta, przy czym nie wolno rysować drugi razy wzdłuż narysowanej już linii (również w przypadku więcej niż jednego bazgroła na kartce). Jeśli dwa bazgroły mają wspólny punkt, to się w nim przecinają. Wykaż, że:

(a) mapę wyznaczoną bazgrołem można pomalować dwoma kolorami.
(b) liczba skrzyżowań pomiędzy dwoma bazgrołami zawsze jest parzysta.

4. W każdym wierzchołku danego wielościanu wypukłego schodzi się parzysta liczba krawędzi. Wykaż, że dowolny przekrój tego wielościanu płaszczyzną nieprzechodzącą przez żaden wierzchołek jest wielokątem o parzystej liczbie boków.

Rozważmy dowolną spójną mapę (tzn. w jednym kawałku), której każdy wierzchołek ma stopień parzysty i pomalujmy ją dwiema barwami. Następnie przekształćmy tę mapę w jeden duży jednobarwny region w sposób przedstawiony na rysunku 4 (warto zastanowić się, dlaczego zawsze jest to możliwe!). Wówczas obwód tego regionu wyznacza sposób narysowania całej pierwotnej mapy bez odrywania ołówka od kartki i z powróceniem do punktu wyjścia.

Rozwiązania niektórych zadań

R1. Każdy punkt mapy pomalujmy na czarno, jeśli leży on wewnątrz nieparzystej liczby spośród danych okręgów, a na biało w przeciwnym przypadku. $\square$

Można też kolorować mapę w miarę jej powstawania. Wnętrze pierwszego okręgu pomalujmy na czarno. Następnie po dorysowaniu każdego kolejnego okręgu, zamieńmy barwy wszystkich obszarów w jego wnętrzu. Nietrudno sprawdzić, że uzyskamy w ten sposób dobre pokolorowanie.

R2. Nie, np. mapę z rysunku 5 da się pomalować dwiema barwami. $\square$

R3. **(b)** Pokolorujmy mapę wyznaczoną przez pierwszy bazgroł dwiema barwami (da się to zrobić na mocy części (a)). Malujmy teraz drugi bazgroł zgodnie z kolorami państw, przez które wędruje. W każdym punkcie przecięcia pierwszego bazgroła zmienia się kolor (i tylko w tych punktach). Ponieważ drugi bazgroł jest krzywą zamkniętą, zmienia on kolor parzystą liczbę razy, co kończy dowód. $\square$