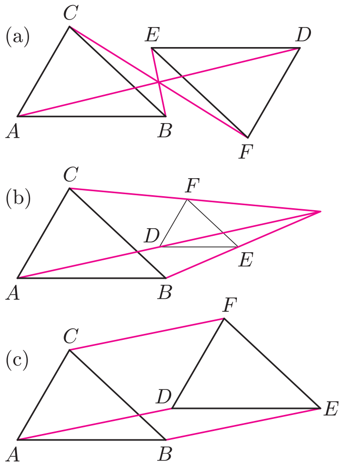
Dwa trójkąty

Joanna JASZUŃSKA

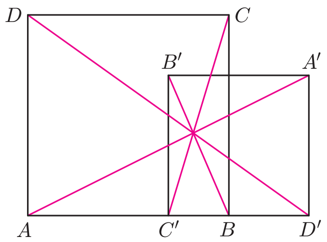
Twierdzenie $(*)$. *Dane są trójkąty* ABC *i* DEF, *przy czym* $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CA \parallel FD$. *Wówczas istnieje jednokładność lub przesunięcie przeprowadzające* A *na* D, B *na* E *i* C *na* F (rys. 1). Innymi słowy, proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie (środku jednokładności) lub są równoległe.

Dwa trójkąty spełniające założenia twierdzenia $(*)$ nazwiemy *zgodnie ułożonymi*, jeśli równoległe wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DE}$ mają ten sam zwrot (rys. 1 (b) i (c)) oraz *niezgodnie ułożonymi* w przeciwnym przypadku (rys. 1 (a)). Dla trójkątów niezgodnie ułożonych przekształcenie opisane w twierdzeniu jest jednokładnością o skali ujemnej, czyli *odcinki* AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 1

1. Punkty A, C', B, D' położone są na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Kwadraty $ABCD$ i $A'B'C'D'$ leżą po tej samej stronie tej prostej (rys. 2). Wykaż, że odcinki AA', BB', CC', DD' przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 2

2. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Każda z przekątnych AD, BE, CF dzieli ten sześciokąt na dwa czworokąty o równych polach. Udowodnij, że przekątne te przecinają się w jednym punkcie.

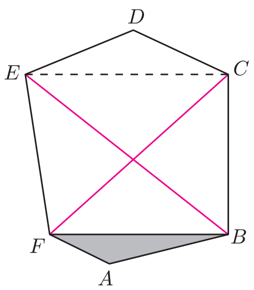
3. *Twierdzenie Pascala.* Punkty A, B, C, D, E, F leżą na jednym okręgu. Proste AB i DE przecinają się w punkcie X, proste BC i EF w punkcie Y, proste CD i FA w punkcie Z. Wykaż, że wówczas punkty X, Y, Z leżą na jednej prostej.

4. Okręgi O_1, O_2, O_3 są styczne odpowiednio do par boków AB i AC, AB i BC oraz AC i BC trójkąta ABC. Okrąg O jest styczny zewnętrznie do okręgów O_1, O_2, O_3 odpowiednio w punktach D, E, F. Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

5. Udowodnij twierdzenie $(*)$.

Rozwiązania niektórych zadań

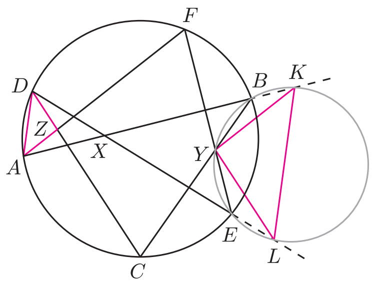
R1. Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne (jako połówki kwadratów) oraz są położone w sposób opisany w twierdzeniu $(*)$. Ponadto są one niezgodnie ułożone, istnieje więc jednokładność o skali ujemnej przeprowadzająca A na A', B na B' oraz C na C'. Odcinki AA', BB', CC' przecinają się więc w jej środku. Analogicznie odcinek DD' przechodzi przez punkt przecięcia odcinków AA' i BB'. $\square$



Rys. 3.

R2. Niech $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Skoro $[ABCF] = \frac{1}{2}[ABCDEF] = [ABEF]$, to $[FBC] = [FBE]$ (rys. 3). Trójkąty te mają wspólną podstawę FB, zatem mają też równe wysokości na nią. Ponieważ punkty C i E leżą po tej samej stronie prostej FB, wynika stąd, że $CE \parallel FB$. Analogicznie $AE \parallel DB$ oraz $AC \parallel DF$.

Wobec tego niezgodnie ułożone trójkąty ACE i DFB spełniają założenia twierdzenia $(*)$. Jeden z nich jest więc obrazem drugiego w pewnej jednokładności o ujemnej skali, której środek leży na każdym z odcinków AD, BE, CF. $\square$



Rys. 4

R3. Niech okrąg opisany na trójkącie BEY przecina proste AB, DE w drugich punktach odpowiednio K i L. Dowód przeprowadzimy w przypadku przedstawionym na rysunku 4, pozostałe można uzasadnić podobnie.

Rozważmy trójkąty ADZ i KLY. Z równości kątów wpisanych opartych na jednym łuku mamy $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BEF = \sphericalangle BEY = \sphericalangle BKY$, więc $AZ \parallel KY$, ponieważ punkty Z i Y leżą po przeciwnych stronach prostej AK. Podobnie $DZ \parallel LY$. Ponadto czworokąt $BKLE$ jest wpisany w okrąg, zatem $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DEB = \sphericalangle BKL$, a stąd $AD \parallel KL$.

Wobec tego trójkąty ADZ i KLY spełniają założenia twierdzenia $(*)$. Stąd punkt X przecięcia prostych AB i DE należy też do prostej YZ. $\square$

Wskazówka 4. Warto opisać na okręgu O trójkąt $A'B'C'$ o bokach odpowiednio równoległych do boków trójkąta ABC, ale niezgodnie ułożony, a następnie dowieść, że pewna jednokładność o środku D przeprowadza punkt A na A'.

Więcej o jednokładnościach w *deltoidach* 1–3/2010, w tym m.in. nieco inne rozwiązanie zadania 4.
Tw. Pascala opisano dokładniej w *deltoidzie* 9/2014.