



## SPIS TREŚCI NUMERU 11 (510)

Rozbijanie sieci  
terrorystycznych  
za pomocą teorii gier  
*Oskar Skibski*

Jak badamy głębokie wnętrza  
Ziemi?  
*Marek Grad*

Stożki i walce  
*Jarosław Górnicki*

Tajemnica  
*Wojciech Czerwiński*


Sprawiedliwie,  
sprawiedliwie,  
najsprawiedliwiej  
*Karol Gryszka*

Złoty podział odcinka  
a ładowanie akumulatora  
samochodowego  
*Maciej Siwczyński*

 Zadania

O własnościach prostej  
Simsona  
*Dominik Burek,  
Tomasz Cieśla*

Połowanie na ciągi  
*Bartłomiej Pawlik*

 Mamy problem  
*Magdalena Fikus*


Aktualności


Informatyczny kącik  
olimpijski (99): Kosmita  
*Tomasz Idziaszek*

Klub 44

Prosto z nieba: Mikroksiężyc  
miniplanety

Niebo w listopadzie

 Dwa trójkąty  
*Joanna Jaszewska*

 Warsaw Center  
of Mathematics  
and Computer Science

wcmcs.edu.pl

4 sierpnia 2016 roku zmarł

## Paweł Domański matematyk

Profesor Domański był pierwszym zwycięzcą  
w naszym Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki,

w 1978 roku zdobył złoty medal za pracę  
*Uogólnione ciągi Fibonacciego.*

*Delta* 1/1979, [www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

- str. 1 Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.
- str. 4 Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.
- str. 8 Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Tomasz Kazana, Krystyna Kordos – sekr. red.,
- str. 9 Marek Kordos – red. nacz., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nacz., Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:  
str. 12 Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

str. 14 Okładki i ilustracje: Podpunkt; rysunki techniczne: Marcin Adamski.

Skład systemem  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

str. 15

PRENUMERATA

str. 18 **Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

str. 20 **RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:**

str. 21 Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

str. 22 Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: [prenumerata@ruch.com.pl](mailto:prenumerata@ruch.com.pl)  
lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

str. 23 pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7<sup>00</sup>–17<sup>00</sup>.  
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

str. 24

str. 24 Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):** [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

str. 25 **Można nas też znaleźć na** [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

**Cena 1 egzemplarza 4 zł**

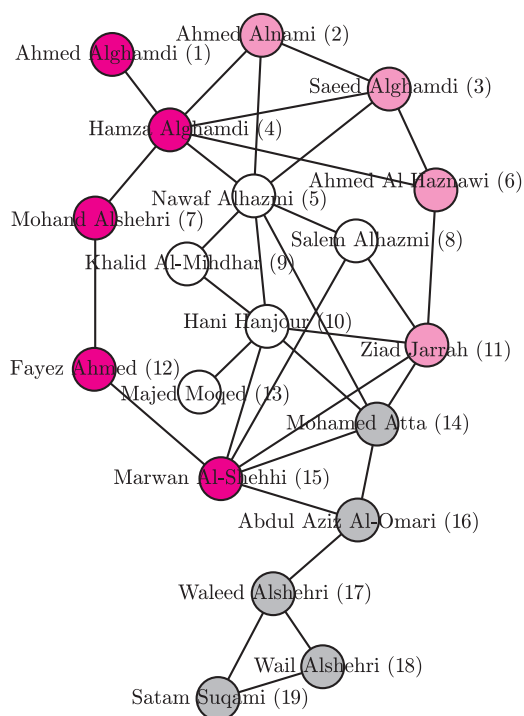
**W następnym numerze polecamy bity w szufladkach.**

# Rozbijanie sieci terrorystycznych za pomocą teorii gier

Oskar SKIBSKI\*

\*Uniwersytet Warszawski, Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Mimo licznych działań skierowanych na zwalczanie terroryzmu wiele organizacji terrorystycznych wciąż się powiększa. Aby poradzić sobie z tym problemem, agencje bezpieczeństwa poszukują nowych sposobów analizy pozwalających lepiej zrozumieć strukturę tych organizacji. Jednym z problemów jest zidentyfikowanie kluczowych członków organizacji terrorystycznej przy użyciu informacji jedynie o tym, jak wygląda sieć terrorystyczna – dzięki temu agencje bezpieczeństwa mogłyby skupić swoje ograniczone zasoby na tych jednostkach. W tym artykule omówimy nowe podejście do tego problemu oparte na teorii gier. Zaczniemy jednak od przeglądu standardowych metod, które niedawno wprowadzone zostały do IBM i2 *Analyst's Notebook* – oprogramowania używanego przez organy ścigania i agencje wywiadowcze na całym świecie.



Sieć terrorystów bezpośrednio odpowiedzialnych za ataki na World Trade Center w 2001 roku. Kolorami wyróżnione są cztery samoloty, którymi lecieli zamachowcy-samobójcy.

Tak naprawdę szukamy ogólnej metody określania ważności wierzchołka w sieci (sieci terrorystycznych jest przecież bardzo dużo!). *Miara centralności* to zatem funkcja, która dla każdego grafu daje wektor wag:

$$F : \mathcal{G}^V \rightarrow \mathbb{R}^V,$$

gdzie  $\mathcal{G}^V$  to zbiór wszystkich grafów z wierzchołkami  $V$ , a  $\mathbb{R}$  to zbiór liczb rzeczywistych.

Formalnie ścieżka to ciąg wierzchołków  $p = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ , w którym każde dwa kolejne wierzchołki są połączone krawędzią, czyli  $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$  dla każdego  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .

Warto zwrócić uwagę na to, że sposób, w jaki narysowany jest graf, nie wpływa na odległości między wierzchołkami i może mocno mylić przy szukaniu centralnego wierzchołka „na oko”.

## Podstawowe miary centralności

Wyobraź sobie, Czytelniku, że pracujesz w Centrum Antyterrorystycznym ABW, a na Twojej korkowej tablicy znajdują się zdjęcia 19 terrorystów połączonych sznurkami tak jak na rysunku. Każdy sznurek określa połączenie pomiędzy dwoma terrorystami – takie połączenie może oznaczać kontakt (np. rozmowę telefoniczną) między nimi, o którym wiedzą służby, lub więzi rodzinne. Twoim zadaniem jest wybranie terrorysty, któremu agencja założy podsłuch. Którego terrorystę wskażesz?

Trochę bardziej formalnie – nasza sieć to (nieskierowany) graf, czyli para  $(V, E)$ , w której  $V$  oznacza zbiór wierzchołków (terrorystów), a  $E$  to nasze połączenia (sznurki), czyli zbiór krawędzi. Krawędź pomiędzy wierzchołkami  $v$  i  $u$  oznaczamy przez  $\{v, u\}$  (jest to zatem nieuporządkowana para). Naszym celem jest określenie, jak ważny jest każdy wierzchołek, czyli przypisanie każdemu  $v$  pewnej liczby rzeczywistej  $F(v)$ . Takie przypisanie, czyli formalnie funkcję, nazwiemy *miarą centralności*. Miary centralności mają szereg zastosowań od tak odległych jak wyznaczanie najbardziej wpływowych osób w sieciach społecznych, przez kluczowe węzły w infrastrukturze drogowej czy informatycznej, aż po analizę istotności genów w sieciach biologicznych.

Wróćmy jednak do naszego przykładu. Jak wybrać terrorystę, którego będziemy podsłuchiwać? Jeżeli zależałoby nam po prostu na zmaksymalizowaniu liczby podsłuchanych osób, powinniśmy wybrać osobę z największą liczbą połączeń. Miara oceniająca wierzchołek ze względu na ilość jego krawędzi nazywana jest *miarą stopnia wierzchołka* (*degree centrality*):

$$D(v) = |\{u \in V : \{v, u\} \in E\}| \quad (\text{miara stopnia}).$$

Na rysunku jest to Nawaf Alhazmi (5), który ma połączenie z aż siedmioma innymi osobami. Zwróćmy jednak uwagę, że wybierając tego terrorystę, rzeczywiście nagramy dużo osób, ale uzyskane informacje mogą mało znaczyć. Prezydent ma bezpośredni kontakt z mniejszą liczbą osób niż sprzedawca w McDonalddie.

Zastanówmy się teraz, jak przechwycić losową informację krążącą po sieci terrorystycznej. Najlepsza pod tym względem jest osoba, która jest w centralnym punkcie sieci. Jak bardzo dany wierzchołek jest w centrum, możemy zmierzyć, patrząc na to, jak daleko jest od innych wierzchołków. Odległość wierzchołka  $v$  od  $u$  definiujemy w grafie, mierząc najkrótszą ścieżkę między nimi, czyli licząc, ilu krawędzi musimy użyć, aby dotrzeć z  $v$  do  $u$ . Miara oparta na tej idei nazywa się *miarą bliskości* (*closeness centrality*):

$$C(v) = \frac{1}{\sum_{u \in V \setminus \{v\}} \text{dist}(v, u)} \quad (\text{miara bliskości}),$$

gdzie  $\text{dist}(v, u)$  to odległość wierzchołka  $v$  od  $u$ . Powyżej wzięliśmy odwrotność sumy odległości, a zatem wierzchołek, który jest blisko innych, będzie miał tę wartość wysoką, a ten położony na obrzeżach – niską. Miara bliskości zastosowana do naszej sieci z rysunku po raz kolejny wskazuje Nawafa Alhazmi (5), ale tym razem jest on *ex aequo* z Mohamedem Attą (14) (obaj uzyskali wartość  $1/35$ ).



Mówimy, że graf jest *spójny*, kiedy z każdego wierzchołka do każdego innego istnieje ścieżka. Wierzchołek rozcinający czy inaczej *punkt artykulacji* to wierzchołek, którego usunięcie powoduje, że graf przestaje być spójny.

Powyższy sposób jest skuteczny, jeżeli informacje krążą losowo. Zastanówmy się jednak, kto najczęściej będzie na szlaku informacji. Załóżmy, że wierzchołek  $s$  chce przekazać pewną informację wierzchołkowi  $t$ . Najlepiej, żeby informacja dostała się do  $t$  jak najszybciej i jak najbezpieczniej (lepiej nie wtajemniczać osób, których nie trzeba), w związku z tym założymy, że porusza się ona po najkrótszej ścieżce. Najkrótszych ścieżek może być jednak kilka. Np. na rysunku Mohamed Atta (14) może dostarczyć informację do Salema Alhazmiego (8) przez Ziada Jarraha (11) albo przez Marwana Al-Shehiego (15). Możemy jednak powiedzieć, że skoro Ziad Jarrah (11) należy do połowy najkrótszych ścieżek pomiędzy (14) i (8), to przechwyci połowę informacji wysyłanych między nimi. Rozważając wszystkie pary, które mogą wysłać do siebie informacje i dodając te liczby, otrzymujemy miarę pośrednictwa (po angielsku *betweenness centrality*):

$$B(v) = \sum_{s,t \in V \setminus \{v\}} \frac{|\{p \in \Pi(s,t) : v \in p\}|}{|\Pi(s,t)|} \quad (\text{miara bycia pomiędzy}),$$

gdzie  $\Pi(s,t)$  oznacza zbiór najkrótszych ścieżek pomiędzy  $s$  a  $t$ . A zatem w mianowniku mamy liczbę wszystkich najkrótszych ścieżek pomiędzy  $s$  a  $t$ , a w liczniku – liczbę takich ścieżek z wierzchołkiem  $v$ . Obliczenie miary pośrednictwa dla naszego grafu wymaga już trochę pracy. Kiedy to zrobimy, po raz kolejny okaże się, że wygrał Nawaf Alhazmi (5). Na drugim miejscu znajduje się jednak Abdul Aziz Al-Omari (16), który klasyfikowany jest nisko według innych miar – nie ma ani dużo połączeń, ani nie jest w centrum sieci. Czemu znalazł się on tak wysoko?

Wierzchołek ten jest wierzchołkiem rozcinającym, czyli ma taką wyjątkową cechę, że jego usunięcie powoduje, iż graf przestaje być połączony (spójny) i sieć traci możliwość koordynacji. Analitycy sieci terrorystycznych wskazują, że osoby takie odgrywają kluczową rolę w sieci, będąc na złączeniu wielu grup potrzebnych do przeprowadzenia ataku. Wyeliminowanie takich osób może najbardziej przyczynić się do rozbitcia sieci terrorystycznej.

## Miara łączenia grafu

Oprócz Abdula Aziza Al-Omariego (15) istnieją tylko trzy inne wierzchołki rozcinające: są to Hamza Alghamdi (4), Hani Hanjour (10) oraz Waleed Alshehri (17). Jeśli przyjmiemy to kryterium, reszta wierzchołków pozostaje nierozpoznawalna. W gęstszych grafach, tzn. grafach z większą ilością krawędzi przy tej samej ilości wierzchołków, często nie ma żadnego rozcinającego wierzchołka, tzn. usunięcie żadnego pojedynczego wierzchołka nie prowadzi do rozspójnienia grafu. Jak wówczas znaleźć wierzchołek najważniejszy w utrzymywaniu jego spójności?

W tym celu zamiast rozpatrywać pojedyncze wierzchołki musimy patrzeć na całe ich grupy. Grupy będziemy oceniać według tego, czy potrafią komunikować się bez pozostałych wierzchołków, czy nie, tzn. czy po usunięciu pozostałych wierzchołków z grafu będzie on spójny. W najprostszej wersji moglibyśmy przypisać grupie wartość 1, jeżeli jest ona spójna i 0 w przeciwnym przypadku. My postąpimy trochę mądrzej i weźmiemy pod uwagę, jak bardzo niespójna jest grupa: wartość 0 dostanie, jeżeli wszyscy jej członkowie są osobno, 1 – jeżeli dokładnie jedna para jest połączona itd. W rezultacie spójna grupa  $k$  wierzchołków otrzyma wartość  $k - 1$ . Bardziej formalnie – wartość grupy wierzchołków  $S \subseteq V$  określamy równaniem

$$f^*(S) = |S| - |K(S)|,$$

gdzie  $|K(S)|$  to liczba jej komponentów, czyli spójnych części. Przykładowo na rysunku trzyosobowa grupa osób o nazwisku Alshehri (7, 17, 18) otrzyma wartość 1, a równie liczna rodzina Alghamdich (1, 3, 4) wartość 2. Jak wyznaczyć jednak teraz, kto najbardziej przykłada się do łączenia grafu? Z pomocą przychodzi nam teoria gier, a konkretniej gry koalicyjne. Jak się zaraz okaże, powyższy problem oceny ważności w grafie zamieniliśmy na problem oceny ważności graczy w grze koalicyjnej...

## Gry koalicyjne na ratunek!

*Gra koalicyjna* to para  $(N, f)$ , gdzie  $N$  to zbiór graczy, a  $f$  to tak zwana funkcja charakterystyczna, która każdej niepustej grupie graczy przypisuje pewną liczbę rzeczywistą, będącą ich wypłatą (formalnie  $f : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  przy czym zbiór pusty ma wartość 0:  $f(\emptyset) = 0$ ). W grze koalicyjnej grupy nazywamy koalicjami. Gry koalicyjne



### Rozwiązanie zadania F 915.

W obu przypadkach możemy posłużyć się analizą wymiarową. W przypadku a) zakładamy zależność postaci:

$$c \propto \sigma^x \rho^y \lambda^z.$$

Wymiarem prędkości  $c$  jest m/s, napięcia powierzchniowego  $\sigma$  – N/m = kg/s<sup>2</sup>, gęstości  $\rho$  – kg/m<sup>3</sup>, a długości fali  $\lambda$  – m. Po porównaniu wymiarów lewej i prawej strony otrzymujemy:  $x = 1/2$ ,  $y = -1/2$ ,  $z = -1/2$ , czyli:

$$c^2 = A \frac{\sigma}{\rho \lambda},$$

gdzie  $A$  jest pewną bezwymiarową stałą – ściśle rozwiązanie zagadnienia dla fal kapilarnych prowadzi do wartości  $A = 2\pi$ . Znalezione zależności poprawnie opisuje zachowanie bardzo krótkich fal ( $\lambda < 1/3$  cm) na powierzchni wody. W przypadku b) zakładamy:

$$c \propto \rho^x g^y \lambda^z$$

Analiza wymiarowa prowadzi do wartości:  $x = 0$ ,  $y = 1/2$ ,  $z = 1/2$ , czyli:

$$c^2 = Bg\lambda,$$

gdzie  $B$  jest bezwymiarową stałą – ściśle rozwiązanie zagadnienia dla fal grawitacyjnych prowadzi do  $B = (2\pi)^{-1}$ . Znalezione zależności poprawnie opisuje fale na wodzie, gdy  $\lambda > 8$  cm.

używane są w ekonomii np. do modelowania rynków, a w informatyce stanowią popularny model kooperacji agentów w systemach wieloagentowych.

Podstawowym problemem w grze koalicyjnej jest następujące pytanie. Załóżmy, że wszyscy gracze będą razem współpracować i utworzą koalicję  $N$ . Jak teraz powinni podzielić się wspólną wypłatą? Przykładowo, niech firma  $A$  sprzedaje lody po 4 złote, a firma  $B$  sprzedaje patyki po 2 złote. Jeżeli firmy te się połączą, będą sprzedawać lody na patyku za 12 złotych. Jak powinny podzielić się tymi 12 złotymi?

Opisana gra to zatem para  $(\{A, B\}, f)$ , gdzie funkcja  $f$  jest określona następująco:  $f(\{A\}) = 4$ ,  $f(\{B\}) = 2$  i  $f(\{A, B\}) = 12$ .

Najsłynniejszą metodę rozwiązania tego problemu podał Lloyd Shapley, amerykański uczony i laureat Nagrody Nobla z ekonomii. Shapley zaproponował, aby oceniać gracza, patrząc na to, jaki jest jego wkład do różnych koalicji. Tak zwany *wkład marginalny* gracza  $i$  do koalicji  $S$  definiujemy jako różnicę pomiędzy wartością koalicji  $S$  z graczem  $i$  i bez niego:  $f(S \cup \{i\}) - f(S)$ . W oparciu o to pojęcie Shapley zaproponował następującą procedurę obliczania uczciwego udziału gracza  $i$  we wspólnej wypłacie. Ustalmy pewną permutację  $\omega$ , czyli kolejność, w jakiej gracze dołączają do gry. Każdy kolejny gracz zwiększa wartość już istniejących graczy o swój wkład marginalny. W szczególności jeżeli przez  $S_i^\omega$  oznaczymy zbiór graczy, którzy występują w permutacji  $\omega$  przed graczem  $i$ , gracz  $i$  wnosi wartość  $f(S_i^\omega \cup \{i\}) - f(S_i^\omega)$ . Teraz uczciwa wypłata gracza  $i$  to średni wkład marginalny po wszystkich możliwych permutacjach:

$$SV_i(N, f) = \frac{1}{|N|!} \sum_{\omega \in \Omega(N)} f(S_i^\omega \cup \{i\}) - f(S_i^\omega) \quad (\text{wartość Shapleya})$$

Czytelnik Wnikliwy zauważy, że wielokrotnie będziemy rozpatrywać wkład gracza  $i$  do takiej samej koalicji  $S$  przy różnych permutacjach. Bazując na tej obserwacji, wartość Shapleya można zapisać następująco:

$$\sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N|-|S|-1)!}{|N|!} (f(S \cup \{i\}) - f(S)).$$

Uzasadnienie tej formuły pozostawiamy Czytelnikowi.

gdzie  $\Omega(N)$  to zbiór wszystkich permutacji zbioru  $N$ . Ta metoda podziału nazywana jest *wartością Shapleya*. Mimo że może się ona wydawać arbitralna, Shapley pokazał, że jest to jedyny liniowy sposób podziału całej wypłaty w sposób, który symetrycznym graczom przypisuje taką samą wartość, a graczom, którzy nie wnoszą nic do żadnej koalicji, nie daje nic. Wartość Shapleya w przykładzie powyżej da firmie  $A$  (od lodów) 7 złotych, a firmie  $B$  (od patyków) 5 złotych.

Użyjemy teraz wartości Shapleya do znalezienia wierzchołka najistotniejszego z punktu widzenia utrzymywania spójności grafu. Naszym zbiorem graczy są teraz wierzchołki grafu, a funkcją oceniającą koalicje  $f^*$ . Nasza gra to zatem  $(V, f^*)$ . Zastosowanie wzoru na wartość Shapleya da nam następujący wynik:

$$A(v) = \frac{1}{|V|!} \sum_{\omega \in \Omega(V)} |K(S_v^\omega)| - |K(S_v^\omega \cup \{v\})| + 1 \quad (\text{miara łączenia}).$$

Wkład marginalny wierzchołka  $v$  do koalicji  $S_v^\omega$  jest zatem równy różnicy ilości połączonych grup (komponentów), która była bez  $v$ , a będzie z graczem  $v$  plus jeden. Jest to zatem ilość komponentów z  $S_v^\omega$ , z którymi  $v$  jest połączony: jeżeli nie będzie połączony, zwiększy liczbę komponentów o 1 i otrzyma 0. Jeżeli złączy trzy grupy w jedną – otrzyma wartość 3. Tak jak chcieliśmy: gracz jest rzeczywiście oceniany w zależności od tego, jak dobry jest w łączeniu grafu!

Wyniki, jakie otrzymujemy według tej miary, są zupełnie inne niż z podstawowych miar, a niechlubny zwycięzca poprzednich miar – Nawaf Alhazmi (5) – jest u nas dopiero szósty. Na pierwszym miejscu znajduje się Hani Hanjour (10), którego usunięcie odłącza Majeda Moqed (13) z sieci. Widzimy także, że jego sąsiedzi są dość słabo połączeni, dlatego często jest on łącznikiem pomiędzy nimi. Drugie i trzecie miejsce zajmują Hamza Alghamdi (4) oraz Marwan Al-Shehhi (15) – dwaj terroryści w całości odpowiedzialni za jeden z samolotów – bez nich pozostali trzej terroryści z tego samolotu nie byłiby w ogóle połączeni z siecią terrorystyczną. Czwartą wartość otrzymał Abdul Aziz Al-Omari (16) – wspomniany już terrorysta, który kontroluje „najniższy” na rysunku samolot. Piąty z kolei jest jego łącznik z kolejną dwójką – Waleed Alshehri (17). Wszystkie cztery wierzchołki rozcinające znalazły się zatem w pierwszej piątce naszego nowego rankingu – o to nam właśnie chodziło.

Sprytne użycie gier koalicyjnych pozwoliło nam zatem uzyskać pewien ranking oceniający wierzchołki według tego, jak ważne są w utrzymywaniu spójności grafu. Nie w każdej sieci ta miara będzie wskazywać najważniejsze wierzchołki i wyników tych nie można traktować jako twardych dowodów. Jest to jednak kolejna poszlaka, która w połączeniu z innymi może kiedyś pomóc agencjom bezpieczeństwa w udaremnieniu kolejnego ataku terrorystycznego.

Ogólny mechanizm użyty przez nas w tym artykule wygląda zatem następująco:

1. dla każdej grupy elementów określ jej wartość oraz
2. zaaplikuj wartość Shapleya.

W ten sposób dostajemy oszacowanie ważności każdego elementu, biorąc pod uwagę jego interakcje z innymi.

# Jak badamy głębokie wnętrze Ziemi?

\*Instytut Geofizyki, Wydział Fizyki,  
Uniwersytet Warszawski

Marek GRAD\*

Naszym bezpośrednim badaniom dostępne są jedynie najbardziej zewnętrzne warstwy Ziemi. Doliny górskie odsłaniają skały do głębokości rzędu kilku kilometrów. Najgłębsze geologiczne odwierty badawcze sięgają niewiele głębiej niż 10 km. Informacji o skałach i minerałach budujących wnętrze Ziemi dostarczają nam ksenolity, czyli fragmenty skał porwane i wyniesione z głębi Ziemi w procesach wulkanicznych. Na ich podstawie petrologowie potrafią określić skład mineralny do głębokości kilkuset kilometrów. Promień Ziemi to 6371 km, czyli do środka naszego globu jeszcze bardzo daleka droga. Ze względu na ogromne ciśnienie i temperaturę osiągającą około 5000°C trudno spodziewać się, że najgłębsze wnętrze będzie kiedykolwiek dostępne naszym bezpośrednim badaniom.



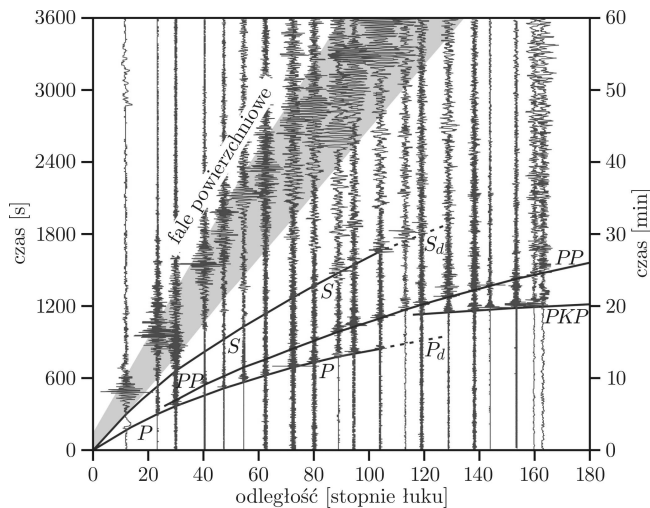
Jak zatem możemy poznać budowę głębokiego wnętrza Ziemi? Takich informacji dostarczają nam fale sejsmiczne generowane przez trzęsienia ziemi. Fale sejsmiczne są to fale sprężyste rozchodzące się w ośrodku sprężystym, a swą nazwę zawdzięczają temu, że są generowane przez wstrząsy, czyli  $\sigma\epsilon\iota\sigma\mu\acute{o}\sigma$  (*sejsmos*, z greckiego). W ośrodku sprężystym (skalnym) mogą się rozchodzić dwa rodzaje objętościowych fal sprężystych (sejsmicznych): szybsze fale podłużne i wolniejsze fale poprzeczne. Fale podłużne są drganiami ośrodka zachodzącymi wzdłuż kierunku propagacji fali, podczas gdy w falach poprzecznych drgania ośrodka są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali. Fale podłużne rejestrowane są jako pierwsze (łac. *primae*), a poprzeczne jako drugie (łac. *secundae*). Stąd też ich tradycyjne oznaczenia w sejsmologii – fale podłużne *P* i poprzeczne *S*. Ich prędkości wynoszą odpowiednio  $V_P$  i  $V_S$ , oznaczane czasem  $\alpha$  i  $\beta$ :

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad V_S = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

gdzie  $\lambda$  i  $\mu$  są współczynnikami sprężystości Lamégo, a  $\rho$  jest gęstością. W ośrodku skalnym zachodzi  $\lambda \approx \mu$ . Dla takiego przybliżenia mamy

$$V_P = \sqrt{3}V_S$$

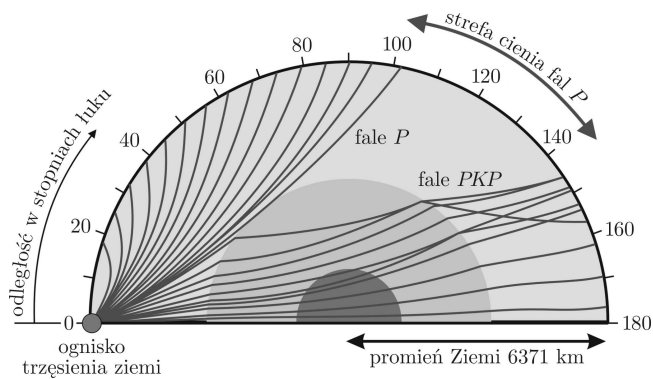
co oznacza, że fale *P* są około 1,73 razy szybsze niż fale *S*.



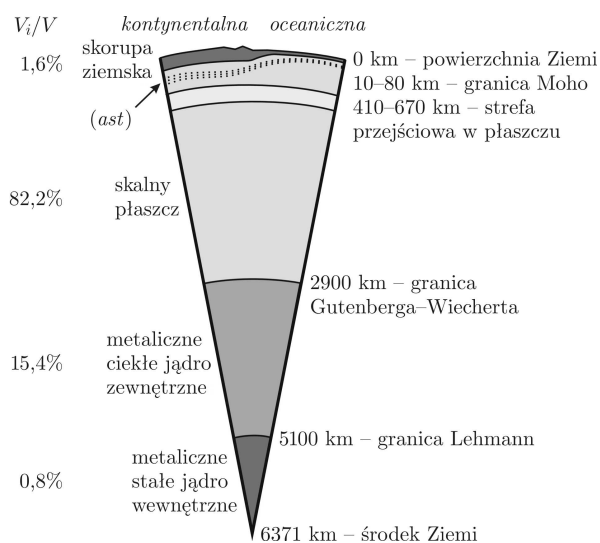
Rys. 1. Sejsmogramy dwudziestu trzęsień ziemi (które zaszły w różnych miejscach globu) zarejestrowanych przez szerokopasmowe sejsmografy sieci „13 BB star” w północnej Polsce. Sejsmogramy są uszeregowane według odległości od ogniska (w stopniach), a każdy przedstawia godzinny zapis (składowa pionowa) począwszy od momentu trzęsienia. Zaznaczono hodografy (czasy przyjścia) fal objętościowych *P* i *S* (fale dyfrakcyjne  $P_d$  i  $S_d$ ), oraz fal powierzchniowych. Fale *PKP* są falami propagującymi się przez płaszcz (*P*), jądro (*K*, z niem. *Kern*) i ponownie przez płaszcz (*P*). Fale *PP* są falami odbitymi od powierzchni Ziemi.

Nałożenie się fal objętościowych *P* i *S* tworzy na powierzchni swobodnej dwa rodzaje fal powierzchniowych Rayleigha i Love’a, które są wolniejsze od fal poprzecznych. Fale powierzchniowe charakteryzują się dużymi amplitudami i zwykle powodują największe zniszczenia podczas trzęsień ziemi.

Generowane podczas bardzo silnych trzęsień ziemi fale sejsmiczne rozchodzą się we wnętrzu Ziemi i są rejestrowane przez stacje sejsmologiczne na całym świecie. Przykład sejsmogramów dla dwudziestu trzęsień ziemi zarejestrowanych przez sieć stacji Wydziału Fizyki UW „13 BB star” w północnej Polsce przedstawia rysunek 1. Są to zapisy sejsmografów szerokopasmowych, tzn. takich, które obejmują pełny zakres możliwych okresów fal sejsmicznych (praktycznie od 0,01 s do 100 s). Taki zakres pozwala jednocześnie rejestrować „krótkie” fale objętościowe i „długie” fale powierzchniowe. Sejsmogramy na rysunku 1 są uszeregowane według odległości od ogniska (w stopniach łuku), a każdy przedstawia godzinny zapis (składowa pionowa) począwszy od momentu trzęsienia. Dominującymi pod względem amplitudy są fale powierzchniowe. Charakteryzują się znaczną czasową rozciągłością zapisu,



Rys. 2. Promienie fal we wnętrzu Ziemi. Odległość od ogniska w stopniach łuku. Strefa cienia jest miejscem gdzie nie docierają fale podłużne odgięte przez jądro, w którym prędkość gwałtownie maleje do około 8 km/s.



Rys. 3. Schematyczny model budowy wnętrza Ziemi: skorupa ziemiska (kontynentalna i oceaniczna), *ast* – astenosfera (warstwa „słaba”) w odróżnieniu od wyżej leżącej litosfery („warstwa sztywna”), płaszcz i jądro.  $V_i/V$  oznacza procentowy udział skorupy, płaszcz, jądra zewnętrznego i jądra wewnętrznego w stosunku do objętości  $V$  całej Ziemi.

wynikającą z dyspersji tych fal, czyli zależności prędkości fali od okresu. Krótsze fale powierzchniowe płycej penetrują wnętrze Ziemi, gdzie prędkości fal są mniejsze i czas przebiegu jest dłuższy. Fale dłuższe głębiej penetrują wnętrze Ziemi – tam prędkości fal są większe i czas przebiegu jest mniejszy. Nadejścia fal powierzchniowych poprzedzają fale objętościowe  $P$  i  $S$  (*primae* i *secundae*). Im dalej od źródła (rys. 1), tym przyrosty czasów przyjscia fal  $P$  i  $S$  są coraz mniejsze, co świadczy o wzroście prędkości  $V_P$  i  $V_S$  z głębokością. Prędkości  $V_P$  rosną od 8 do około 13,5 km/s, prędkości  $V_S$  od 4 do około 7 km/s, a ośrodek, w którym prędkość fal wzrasta, nazywamy płaszczem Ziemi. Bezpośrednie fale objętościowe  $P$  i  $S$  są obserwowane do odległości około 100°, po czym ich amplituda gwałtownie maleje (fale dyfrakcyjne  $P_d$  i  $S_d$ ). Przyczyną tego jest obecność we wnętrzu Ziemi jądra. Prędkość  $V_P$  w jądrze gwałtownie maleje do około 8 km/s, a fale podłużne są odginane na dalsze odległości jako fale  $PKP$  (rys. 1) – fale propagujące

się przez płaszcz ( $P$ ), jądro ( $K$ ) i ponownie przez płaszcz ( $P$ ). Na rysunku tym widać również, że fala podłużna potrzebuje na przejście na wskroś przez Ziemię około 20 minut. Bieg promieni we wnętrzu Ziemi pokazuje rysunek 2.

Obszar odległości, do którego fale  $P$  nie docierają, nazywamy strefą cienia.

Podobny efekt obserwujemy dla fal  $S$ . Ciąg fal objętościowych  $S$  również jest obserwowany do odległości około 100°. Nie przechodzą one przez jądro, co świadczy o jego ciekłym stanie skupienia. Dla cieczy współczynnik sprężystości Lamégo znika:  $\mu = 0$  (brak sprężystości postaci), a z nim prędkość fal poprzecznych:  $V_P = 0$ . Dokładne analizy pokazują, że ośrodek w samym centrum Ziemi jest w stałym stanie skupienia; nazywamy go jądrem wewnętrznym, w odróżnieniu od ciekłego jądra zewnętrznego.

Informacje, których dostarczają nam fale sejsmiczne, pozwalają zbudować model wnętrza Ziemi (rys. 3) na podstawie własności sprężystych. Inne własności fizyczne możemy określić na podstawie pola siły ciężkości (gęstość, ciśnienie), obserwacji prądów magnetotellurycznych generowanych w płaszczu Ziemi (rozkład przewodnictwa elektrycznego), czy rozkładu ziemskiego strumienia cieplnego (temperatura). Petrologiczny skład wnętrza Ziemi możemy określić na podstawie porównań z laboratoryjnymi badaniami własności minerałów i skał w warunkach wysokich ciśnień i temperatur.

Poniżej stosunkowo cienkiej skorupy ziemskiej (kontynentalnej i oceanicznej 10–80 km), poniżej granicy Moho, występuje skalny płaszcz, zbudowany głównie z krzemianów. Granica Gutenberga–Wiecherta na głębokości 2900 km jest najbardziej wyrazistą granicą we wnętrzu Ziemi. Oddziela ona skalny płaszcz znajdujący się w stałym stanie skupienia od metalicznego, ciekłego jądra zewnętrznego. Jądra zewnętrzne i wewnętrzne mają podobny skład żelazowo-niklowy (około 85% Fe, około 6% Ni, 5% Si, reszta to domieszki: S, Cr, P, C i inne). Gęstość skał płaszcz rośnie z głębokością od 3,3 do 5,5 g/cm<sup>3</sup>, a gęstość jądra od 10 do 14 g/cm<sup>3</sup> – skok gęstości na granicy płaszcz–jądro wynosi więc blisko 5 g/cm<sup>3</sup>.

Przedstawiony model wnętrza Ziemi jest modelem referencyjnym. Na podstawie fal sejsmicznych od ogromnej ilości trzęsień ziemi (setki tysięcy) rejestrowanych przez tysiące stacji sejsmologicznych badane są odstępstwa od tego modelu metodą tomografii sejsmicznej. W modelu trójwymiarowym płaszcz Ziemi są one rzędu kilku procent. Ośrodek o prędkościach większych jest interpretowany jako chłodniejszy, a ośrodek o prędkościach mniejszych jako cieplejszy. Jest to ważny element w badaniach konwekcji w płaszczu Ziemi i jej związku z procesami geodynamicznymi prowadzącymi do ruchu płyt litosferycznych, trzęsień ziemi i dryfu kontynentów. Ale to już tematy na inną opowieść...

# Stożki i walce

Jarosław GÓRNICKI\*

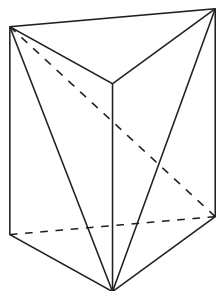
\*Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej,  
Politechnika Rzeszowska

Od Archimedesesa wiemy, że zdaniem Demokryta *stożek stanowi trzecią część walca*, ale pierwszy udowodnił to Eudoksos. Znamy ten rezultat z XII Księgi *Elementów* Euklidesa (Stwierdzenie 10). Euklides, korzystając z metody wyczerpywania (wyjmując graniastosłupy o znanej objętości), pokazał, że ostrosłup o podstawie trójkątnej ma objętość, którą wyraża wzór

$$(*) \quad \text{stała} \cdot \text{pole podstawy} \cdot \text{wysokość}.$$

Stałą wyznaczył z obserwacji: ostrosłup stanowi trzecią część opisanego na nim graniastosłupa (rys. 1). Może Euklides chciał w ten sposób uniknąć korzystania z przejść granicznych przy wyznaczaniu stałej we wzorze (\*) lub potwierdzić jej wartość na innej drodze? Następnie, przybliżając stożek ostrosłupami, uzasadnił twierdzenie Eudoksosa.

Czy we wzorze na objętość stożka, który również jest postaci (\*), można potwierdzić wartość stałej bez ponownego odwoływania się do przejść granicznych? W *Elementach* takiej informacji nie ma. My pokażemy, że jest to możliwe. Wykorzystamy pomysły Archimedesesa sprzed 2200 lat.

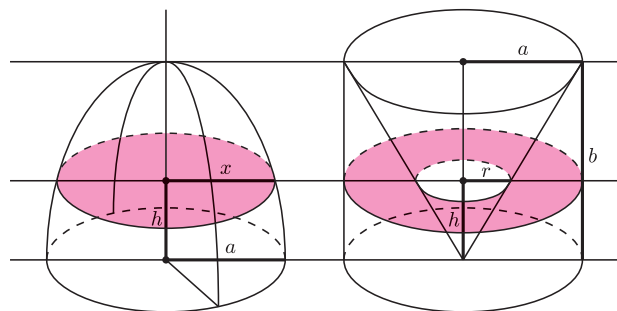


Rys. 1

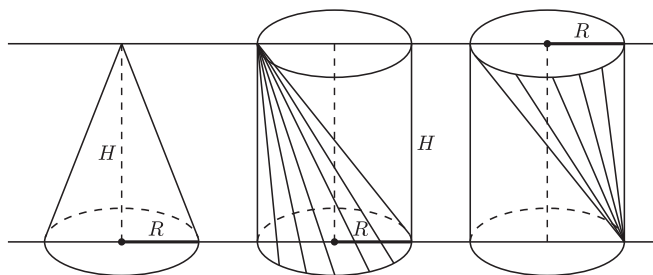
Gdy weźmiemy elipsę o półosiach  $a, b$  i obrócimy ją wokół pionowej osi  $b$ , to otrzymamy bryłę – *elipsoidę obrotową*. Rozważmy z jednej strony górną połowę takiej elipsoidy opartą na kole o promieniu  $a$ , zaś z drugiej strony walec o wysokości  $b$ , którego podstawą jest koło o promieniu  $a$  (rys. 2).

Archimedes zauważył, że jeśli z tego walca wytniemy stożek i obie bryły przetniemy wspólną płaszczyzną równoległą do podstawy na wysokości  $h$  ( $0 \leq h \leq b$ ), to pola otrzymanych przekrojów zawsze będą równe. Dla elipsoidy,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1$ , więc  $x^2 = a^2(1 - \frac{h^2}{b^2})$ . Zatem pole przekroju elipsoidy jest równe  $\pi x^2 = \pi a^2(1 - \frac{h^2}{b^2})$ . Ponieważ dla drugiej figury  $\frac{r}{a} = \frac{h}{b}$ , więc  $r = a \cdot \frac{h}{b}$  i pole pierścienia jest równe  $\pi a^2 - \pi r^2 = \pi a^2(1 - \frac{h^2}{b^2})$ . Zatem objętość połowy elipsoidy obrotowej jest równa objętości opisanego na niej walca pomniejszonej o objętość wydrążonego w nim stożka. Warto również zaznaczyć, że gdy  $a = b$ , to z tych rozważań wynika wzór na objętość kuli:  $\frac{4}{3}\pi a^3$ .

Rozważmy teraz walec o wysokości  $H$ , którego podstawą jest koło o promieniu  $R$ . Objętość tego walca jest równa  $\pi R^2 H$ . W tym walcu umieszczamy dwa stożki, każdy o wysokości  $H$  i podstawach będących podstawami walca (rys. 3).

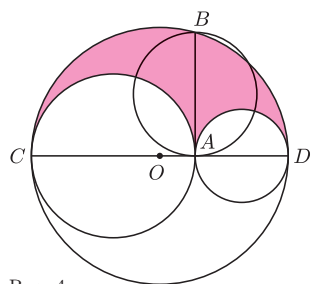


Rys. 2



Rys. 3

Stożki te mają taką samą objętość. Nie wypełniają one objętości walca. Gdy taki walec przetniemy na wysokości  $h$  ( $0 \leq h \leq H$ ) płaszczyzną równoległą do jego podstaw, to naszym oczom ukaże się widok przedstawiony na rysunku 4. Kolorowy obszar  $S$  ma pole równe polu koła o średnicy  $AB$  (to również wiedział Archimedes):



Rys. 4

$$\begin{aligned} |S| &= \frac{1}{2}\pi \left(\frac{CD}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{CA}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi \left(\frac{AD}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}(CD^2 - CA^2 - AD^2) = \\ &= \frac{1}{8}((CA + AD)^2 - CA^2 - AD^2) = \frac{\pi}{4} \cdot CA \cdot AD = \frac{\pi}{4} \cdot AB^2 = \pi \left(\frac{AB}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Pole to jest największe (równe  $\pi(\frac{R}{2})^2$ ), gdy przecięcie jest w połowie wysokości walca i maleje, gdy cięcia przesuwają się w górę albo w dół. Oznacza to, że



**Rozwiązanie zadania M 1510.**

Ponieważ prawdopodobieństwo wylosowania dwóch punktów leżących na tej samej średnicy koła  $\omega$  jest równe zeru, możemy założyć, że taka sytuacja się nie zdarzyła.

Niech  $A_1, A_2, \dots, A_{11}$  będą pewnymi punktami koła  $\omega$ , a  $B_1, B_2, \dots, B_{11}$  – punktami symetrycznymi do nich względem środka koła. Rozważmy  $2^{11}$  sytuacji, w których dla każdego  $1 \leq i \leq 11$   $i$ -tym wylosowanym punktem jest  $A_i$  lub  $B_i$ . Wśród nich jest  $2 \cdot 11$  takich przypadków, w których wylosowane punkty leżą po jednej stronie pewnej średnicy koła  $\omega$  – każdy odpowiada wyborowi pewnego punktu spośród wyróżnionych oraz 10 „kolejnych” zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

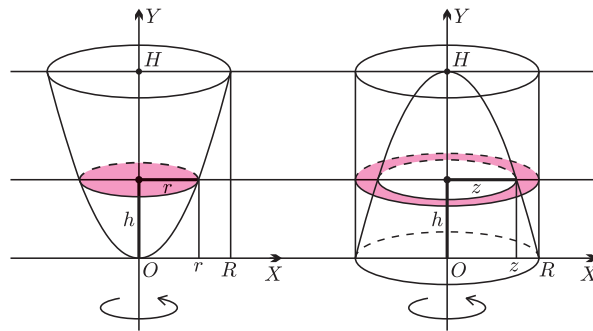
czwarta część objętości walca leżąca poza stożkami może być przedstawiona jako połowa elipsoidy obrotowej o wysokości  $H/2$  mającej w podstawie koło o promieniu  $R/2$ . Aby się o tym przekonać, wystarczy wyznaczyć zależność długości odcinka  $AB$  od odległości między płaszczyzną tnącą a płaszczyzną połowiącą walec. Można również przekształcić odcinek  $OC$  na odcinek o długości  $H/2$  przez powinowactwo prostokątne. Takie przekształcenie łuk okręgu przeprowadza w łuk elipsy. Dzięki temu otrzymujemy „równanie objętości brył”:

walec( $R, H$ ) = stożek( $R, H$ ) + stożek( $R, H$ ) + 4 · pół elipsoidy ( $R/2, H/2$ ) =  
 = stożek( $R, H$ ) + stożek( $R, H$ ) + 4 [walec ( $R/2, H/2$ ) – stożek ( $R/2, H/2$ )],  
 gdzie stożek( $R, H$ ) =  $k \cdot \pi R^2 H$  i niewiadomą jest  $k$ . Przekształcając powyższe równanie do postaci

$$\pi R^2 H = k\pi R^2 H + k\pi R^2 H + 4[\pi (R/2)^2 (H/2) - k\pi (R/2)^2 (H/2)],$$

otrzymujemy  $k = 1/3$ . Mamy więc potwierdzenie, że stożek o wysokości  $H$ , mający w podstawie koło o promieniu  $R$ , ma objętość równą  $\frac{1}{3}\pi R^2 H$ .

Spróbujemy teraz wyznaczyć objętość paraboloidy obrotowej o wysokości  $H$  i promieniu podstawy  $R$ . Oczywiście, nie chcemy używać rachunku całkowego. Równanie paraboli tworzącej paraboloidę obrotową o promieniu podstawy  $R$  i wysokości  $H$  jest następujące:  $y = \frac{H}{R^2}x^2$  (rys. 5; taka parabola jest jedyna!). Obok rozważmy walec o wysokości  $H$ , którego podstawą jest koło o promieniu  $R$ , w którym wydrążono paraboloidę obrotową utworzoną przez parabolę  $y = H - \frac{H}{R^2}x^2$ . W wyniku przecięcia obu brył na wysokości  $h$  ( $0 \leq h \leq H$ ) płaszczyzną równoległą do podstawy otrzymujemy koło o polu  $S(h) = \pi r^2 = \pi \frac{R^2 h}{H}$  (korzystamy z równania paraboli  $h = \frac{H}{R^2}r^2$ ).



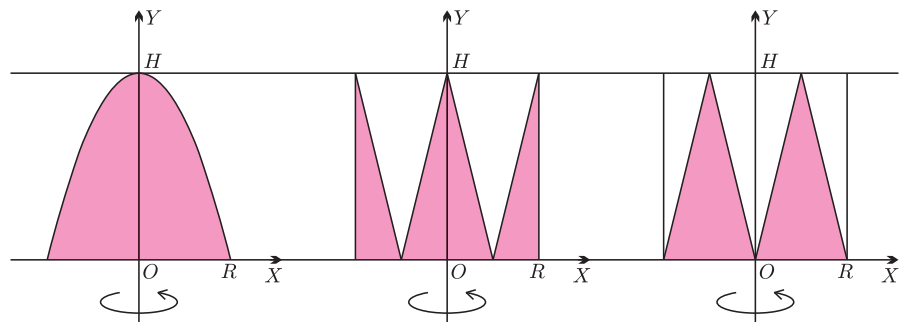
Rys. 5

Ponieważ dla pierścienia mamy  $h = H - \frac{H}{R^2}z^2$ , więc

$$P(h) = \pi R^2 - \pi z^2 = \pi \frac{R^2 h}{H} = S(h).$$

Oznacza to, że objętość paraboloidy obrotowej jest równa połowie objętości opisanego na niej walca:  $\frac{1}{2}\pi R^2 H$ .

Miłośnikom rachunków polecam inne rozwiązanie: można bez trudu sprawdzić, że na rysunku 6 kolorowe obszary obrócone wokół osi  $OY$  wyznaczają w przestrzeni bryły o równych objętościach.



Rys. 6

Ciekawe, czy Euklides byłby zadowolony z takiego rozwiązania...







# mała delta

## Tajemnica

Mam pewien sekret, może lepiej nawet powiedzieć: tajemnicę. Nie mogę sobie pozwolić, żeby ktoś ją poznał. Sprawa jest poważna, ujawnię ją dopiero za pewien czas, gdy tylko Świat będzie na to gotowy. Może to rozwiązanie pewnego ważnego problemu matematycznego, zresztą, nie będę dzwonił kluczymi do tajemnic. W każdym razie nie mogę sobie również pozwolić, żeby na wypadek mojej śmierci ta informacja przepadła bezpowrotnie. Co robić?

Na szczęście, opracowałem pewien plan. Podzielę się tą informacją ze służbami specjalnymi. Wybrałem trzy: ABW, CIA i Mosad. Czy mogę jednak w pełni ufać służbom specjalnym? Chyba nie. Dlatego chcę dostarczyć im takie informacje, żeby żadna pojedyncza instytucja nie mogła samodzielnie odkryć nawet kawałka mojej tajemnicy. Co więcej, chcę to zrobić tak, by nawet dwie z nich, jeśli się potajemnie zmówią, nie zdołały odtworzyć ani litery z mojego sekretu. System musi być taki, że dopiero gdy wszystkie trzy służby udostępnią sobie dostarczone przeze mnie informacje, będą w stanie odtworzyć cokolwiek z tajemnicy. Co więcej, chcę, żeby wówczas odtworzyły już wszystko, bo mam nadzieję, że stanie się to jedynie na wypadek mojej śmierci.

Pozostaje pytanie: jak to zrobić? A może nawet właściwsze w tej sytuacji: czy to się w ogóle da zrobić? Okazuje się, że szczęśliwie się da. Zachęcam Ambitnych Czytelników do próby samodzielnego stworzenia takiego systemu.

A robi się to tak. Przedstawiam mój sekret w postaci ciągu zero-jedynkowego. Bitem będziemy nazywać dowolną cyfrę takiego ciągu, czyli zero lub jedynkę. Nietrudno zauważyć, że mogę znaleźć takie przedstawienie bez problemu, na przykład każdą literę alfabetu przedstawiam w postaci ciągu sześciu bitów, da się to zrobić, bo liter alfabetu jest nie więcej niż  $2^6 = 64$ . Teraz mogę się więc skupić na tym, jak podzielić pewien ciąg bitów na trzy kawałki. Nie mogę po prostu przekazać pierwszej jednej trzeciej ABW, drugiej CIA, a trzeciej Mosadowi, bo w sposób oczywisty bez wysiłku każdy z nich znalazłby sporą część tajemnicy.

Żeby wyjaśnić system, konieczne jest zdefiniowanie funkcji xor, która jako argumenty bierze pewną liczbę bitów, a zwraca jeden. Definiujemy ją jako

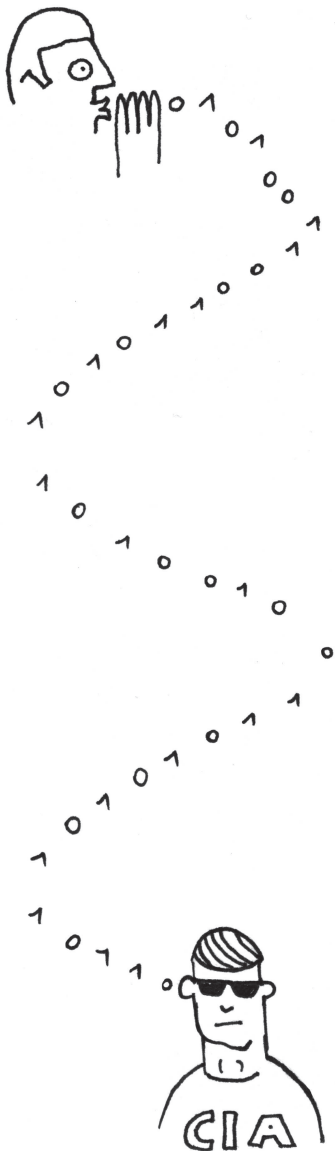
$$\text{xor}(b_1, \dots, b_k) = (b_1 + \dots + b_k) \pmod{2},$$

czyli resztę z dzielenia sumy bitów przez dwa. Możemy rozszerzyć funkcję xor w taki sposób, że jako argumenty bierze ona pewną liczbę ciągów bitowych jednakowej długości, powiedzmy dla ustalenia uwagi, długości  $m$ . Wtedy

$$\text{xor}(w_1, \dots, w_k) = \text{xor}(w_1[1], \dots, w_k[1]) \dots \text{xor}(w_1[m], \dots, w_k[m]),$$
 gdzie przez  $w[i]$  oznaczamy  $i$ -tą literę słowa  $w$ . Czyli, innymi słowy, nowy xor po prostu xoruje argumenty litera po literze. Przykładowo

$$\begin{aligned} \text{xor}(11001, 01000, 10111) &= \\ &= \text{xor}(1, 0, 1) \text{ xor}(1, 1, 0) \text{ xor}(0, 0, 1) \text{ xor}(0, 0, 1) \text{ xor}(1, 0, 1) = 00110. \end{aligned}$$

A teraz system – jest banalnie prosty! Powiedzmy, że moja tajemnica przedstawiona w postaci ciągu bitów ma długość  $m$ . Jej wartość oznaczmy przez  $t$ . Najpierw losuję dwa losowe ciągi bitów  $w_1$  i  $w_2$  długości  $m$ , to będą te przeznaczone dla ABW i CIA. Teraz definiuję trzeci ciąg, dla Mosadu,  $w_3 = \text{xor}(w_1, w_2, t)$ . Tylko dlaczego to działa?



Zauważmy najpierw, że  $t = \text{xor}(w_1, w_2, w_3)$ . Żeby się przekonać, że to prawda, spójrzmy na  $i$ -ty bit. Wiemy, że  $w_3[i] = \text{xor}(w_1[i], w_2[i], t[i])$ . A więc suma  $w_1[i], w_2[i], t[i]$  oraz  $w_3[i]$  jest parzysta. Z tego zaś wynika, że  $\text{xor}(w_1[i], w_2[i], w_3[i]) = t[i]$ . Gdy powtórzymy rozumowanie dla każdego  $i$  między 1 a  $m$ , otrzymamy, że faktycznie  $t = \text{xor}(w_1, w_2, w_3)$ . Czyli ABW, CIA i Mosad współpracując, mogą odtworzyć moją tajemnicę.

Trzeba jednak jeszcze sprawdzić, czy istotnie żadne dwie służby bez trzeciej łącząc swoje siły, nie będą w stanie odkryć żadnej informacji. Jasne jest, że ABW i CIA mają ciągi losowe, więc nie zrobią z nimi niczego sensownego bez Mosadu. Pozostają pozostałe pary – skupmy się na parze CIA i Mosad, bo sytuacja jest identyczna dla pary ABW i Mosad. Przyjrzyjmy się  $i$ -temu bitowi. Wyobraźmy sobie, że CIA i Mosad patrzą na swoje bity i widzą  $w_2[i] = 0, w_3[i] = 0$ . To im jednak nie daje żadnej wiedzy o  $t[i]$ , bo może być tak, że  $w_1[i] = 0 = t[i]$  oraz tak, że  $w_1[i] = 1 = t[i]$  – każda z tych dwóch opcji jest równie prawdopodobna. Podobnie dla każdej kombinacji  $w_2[i]$  i  $w_3[i]$  oraz dla każdego innego indeksu  $i$ . Polecamy Czytelnikom Ambitnym doprecyzowanie tego argumentu.

Nietrudno zauważyć, że opisany system da się uogólnić na dowolne  $N$  służb. Jeszcze ciekawszym pytaniem jest, co zrobić, gdy chcę, by dowolne  $K$  z  $N$  służb, spotykając się, odtworzyło całą tajemnicę, ale już żadne  $K - 1$  służb nie mogło odkryć niczego. Wtedy potrzebne są bardziej zaawansowane techniki, pisaliśmy o tym w *Delcie* 2/2011.

Przygotował Wojciech CZERWIŃSKI

## Sprawiedliwie, sprawiedliwiej, najsprawiedliwiej



Pewnego słonecznego lipcowego poranka Alfred i Berenika ochoczo wybrali się na gdańską plażę. Mieli nadzieję, że wczorajsza burza przysporzy im mnóstwa ciekawych znalezisk i spostrzeżeń. Piasek, fale oraz to, co zdołały wyrzucić na brzeg, to niezwykle bogate źródło ciekawostek. Natknęli się na kamień poprząkany dziurami, jakby był zjedzony przez korniki, oraz muszlę, która kształtem przypominała kardioideę – całkiem niedawno poznali to słowo. Ale najciekawsze zdarzyło się na koniec. Kiedy właściwie chcieli już wracać do domu, zauważyli nieduży woreczek zawiązany starannie sznurkiem. Alfred podszedł z zaciekawieniem do kolejnego odkrycia, a Berenika, zauważywszy, że coś tam ma, w mig znalazła się obok niego.

– Co w nim jest? – zapytała podekscytowana znaleziskiem. – Rozwiąż! Chłopiec otworzył worek, a sznurek włożył do kieszeni. W środku znaleźli mnóstwo starych monet. Alfred wyjął kilka z nich i przyglądał się im z uwagą.

– Wyglądają na stare, jeszcze sprzed denominacji. Raczej nie są warte za wiele. Trudno oszacować, ile ich może być. Setka, może więcej. Jak sądzisz?

Po parokrotnym zanurzeniu dłoni w zawartości woreczka dziewczynka orzekła:

– Więcej niż setka. Jak zwykle, dzielimy sprawiedliwie, żeby każdy był zadowolony.

– Sprawiedliwie... Czyli tym razem jak? – dzielenie się zdobyczą przerabiali już parokrotnie na różne sposoby.

– Mam nowy pomysł! Możemy wprowadzić do naszego podziału nutkę losowości. Proponuję, byśmy nie wysypywali zawartości. Nie będziemy wiedzieli, co i ile tak naprawdę dzielimy.

– To wrzucimy do tego zmiętego i mokrego worka monety, które wyjęliśmy i na zmianę losowo wyjmujemy po jednej. Możesz zaczynać – podchwycił pomysł Alfred.

– Dzięki, ale myślę że lepiej będzie, gdy wyciągniemy tymczasowo jedną monetę i będziemy nią rzucać. Jeżeli wypadnie orzeł, ja wyciągam jedną monetę, w przeciwnym przypadku ty.

Alfred i Berenika długo dyskutowali, czyj sposób losowania jest lepszy.

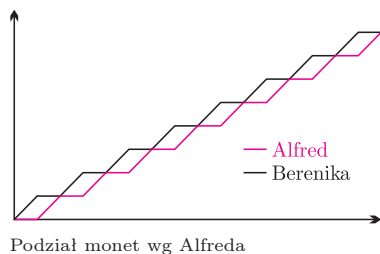
O zagadnieniu *sprawiedliwego podziału* pisaliśmy m.in. w artykule *Piraci* (*Delta* 1/2005) i *Zadanie o podziale puli i arbitraż* (*Delta* 4/2006).

Opisany powyżej problem jest wariantem zagadnienia *sprawiedliwego podziału*. W tym przypadku nie wiemy jednak, jaka jest całkowita wartość rzeczy dzielonej, ani ile wyborów czeka bohaterów.

W szczególności nie wiemy, czy monet jest parzyście, czy nieparzyście wiele. Moglibyśmy posłużyć się zasadą „ja dzielę, Ty wybieraj”, ale Alfred i Berenika chcą dzielić znalezisko przed określeniem jego całkowitej wartości, której zresztą sami nie potrafią, a może nie chcą określić.

Przyjrzyjmy się bliżej zaproponowanym przez nich sposobom. Czy któryś z nich jest *sprawiedliwy*? Jeżeli tak, dlaczego? A jeżeli nie, to który jest *sprawiedliwszy*? Co powinni zrobić, by zagwarantować równość?

W propozycji Bereniki rzut monetą oznacza, że możemy jedynie oczekiwać, że podział zakończy się zbliżoną liczbą monet u każdego. Niemniej, przy tym sposobie zarówno Alfred, jak i Berenika mają duże szanse na to, żeby skończyć z przewagą co najmniej kilku, a nawet kilkunastu monet – co drugiej stronie może się ewidentnie nie spodobać. Wartość monet nie ma w tym przypadku znaczenia, gdyż jest niewielka. Problem sprowadzamy do tego, żeby oboje zakończyli podział z taką samą liczbą monet, albo żeby w dowolnym momencie każde z nich miało równe szanse na zakończenie podziału z większą liczbą. Ciekawa propozycja Bereniki nie jest najlepszym rozwiązaniem. Jest bowiem duża szansa, że gdy jedna osoba zdobędzie przewagę kilku monet, to utrzyma ją już do końca.



Podział monet wg Alfreda

*Liderem* nazywamy osobę, która ma w danej chwili więcej monet. Jeżeli w podziale między dwiema osobami każda z nich ma tyle samo monet, to lidera nie ma. Pierwotna propozycja Alfreda sprowadza się więc do ciągu liderów postaci *BBBB*...

Propozycja Alfreda polega na naprzemiennym wyjmowaniu po jednej monecie. Jeżeli liczba monet jest parzysta, oboje skończą z taką samą ich liczbą. W przeciwnym przypadku, gdy monet jest nieparzyście wiele, Berenika będzie miała o jedną monetę więcej. Taki podział nigdy nie stawia Alfreda na pozycji lidera (przypomnijmy: ustaliliśmy już, że to, co znajduje się na monecie, nie ma znaczenia). Oznacza to, że średnio albo oboje będą mieli tyle samo, albo Berenika więcej. Podział faworyzuje więc (nieznacznie) Berenikę. Algorytm wydaje się jednak nieco lepszy od propozycji Bereniki. Istotnie, nie polegamy już na losowości, niemniej można go poprawić tak, by uzyskać jeszcze „*sprawiedliwszy*” podział. Propozycję Alfreda możemy obrazowo zapisać w postaci ciągu par

$$(BA)(BA)(BA)(BA)(BA)(BA)(BA)(BA)(BA) \dots,$$

gdzie pozycja litery od lewej oznacza numer losowania, a litera, która z dwóch osób wyciąga w danej turze monetę. Problem tego ciągu tkwi w tym, iż każda nieparzysta pozycja zajmowana jest przez *B*. Możemy go uniknąć i tym samym poprawić ciąg podziału, gdy w co drugiej parze litery zamienimy miejscami (grupujemy teraz w czwórki takich samych symboli)

$$(BAAB)(BAAB)(BAAB)(BAAB)(BAAB)(BAAB)(BAAB) \dots$$

Taki podział, choć jest lepszy od poprzedniego, ponownie nie jest idealny. Na czym polega jego przewaga? Jeżeli przedmiotów podziału jest parzyście wiele, to Berenika nie jest już zawsze faworyzowana. W powyższym ustawieniu *B* i *A* występują na nieparzystych miejscach naprzemiennie. Z drugiej strony, niezależnie od liczby monet, ciąg liderów wygląda następująco

$$BABABABA \dots$$

Dla jakiej liczby monet Berenika będzie liderem o jeden raz więcej niż Alfred?

Po pierwszym losowaniu liderem jest  $B$ , po drugim lidera nie ma (obydwoje mają taką samą liczbę monet), po trzecim liderem jest  $A$ , po czwartym lidera nie ma, po piątym liderem jest  $B$  itd. Podział taki jako lidera faworyzuje więc ponownie Berenikę, gdyż ta zawsze będzie liderem co najmniej tyle samo razy co Alfred. Alfred może mieć więc (słuszne) pretensje. W obecnym algorytmie podziału czwórka  $BAAB$  powtarza się i ta cykliczność jest źródłem problemu. Zauważmy, że w pierwotnym podziale ciąg również był okresowy (powtarzał się segment  $BA$ ). Sugeruje to, podobnie jak poprzednio, zamianę w co drugiej czwórce symboli na przeciwne. Generuje to ciąg okresowy, w którym powtarza się cyklicznie osiem symboli:

$$(BAABABBA)(BAABABBA)(BAABABBA)(BAABABBA)\dots$$

Analiza liderów prowadzi do ciągu

$$(BAAB)(BAAB)(BAAB)(BAAB)\dots$$

Ale jest to ciąg, w którym, jak już ustaliliśmy, faworyzowana jest Berenika. Cykliczność, tym razem  $BAABABBA$ , ponownie prowadzi do niesprawiedliwości, lecz na nieco głębszym poziomie.

Możemy spróbować przejść do ogólnych wniosków. Po każdej z powyższych zmian ciąg podziału jest okresowy, co przekłada się ostatecznie na okresowość któregoś skumulowania (tworzymy ciąg liderów od ciągu liderów), a tym samym faworyzowanie Bereniki. Kolejne korekty dokonujemy w co drugiej parze, czwórce, ósemce... – ogólniej, w co drugiej  $2^n$ -tce przez zamianę symboli. Ponieważ nie znamy dokładnej liczby monet, a chcielibyśmy zaproponować maksymalnie sprawiedliwy sposób losowania, sugeruje to wykonanie na nieskończonym ciągu nieskończenie wielu operacji zamiany liter. Operacja taka ma swoją „granice”, której początek wygląda następująco

$$BAABABBAABBABAABABBABAABBAABABBA\dots$$

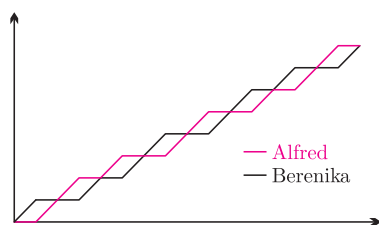
Powyższy ciąg można skonstruować również w inny sposób. Startujemy mianowicie od pary liter  $BA$ , do której po prawej stronie dołączamy jej *negatyw*, czyli ciąg liter, w którym  $B$  i  $A$  zamienione zostały miejscami. Następnie do otrzymanego ciągu  $BAAB$  dołączamy kolejny negatyw, otrzymując  $BAABABBA$ . Operację taką powtarzamy w nieskończoność, otrzymując w granicy to samo co poprzednio. Ciąg ten nosi nazwę ciągu Thuego–Morse’a i czasem jest nazywany ciągiem sprawiedliwego podziału (*fair share sequence*). Taką nazwę zawdzięcza zastosowaniu do rozwiązania problemu, z którym Alfred i Berenika borykali się na gdańskiej plaży. Jego „doskonałość” polega między innymi na tym, że ciąg liderów jest ponownie ciągiem Thuego–Morse’a, a więc i wszystkie kolejne iteracje skumulowanego prowadzenia są tej postaci.

– Ciąg Thuego–Morse’a? Nigdy o nim nie słyszałem! – skarży się Alfred. Berenika była wyraźnie zaskoczona tym, co przeczytali w znanym czasopiśmie popularnonaukowym. Interesowała się matematyką, o ciągu Thuego–Morse’a przeczytała parę faktów przed miesiącem, ale żaden z nich nie dotyczył sprawiedliwego podziału.

– Nie przejmuj się, Alfredzie! Nie tylko udało nam się podzielić monety najsprawiedliwiej. Poznaliśmy również ciąg sprawiedliwego podziału. Poczekaj chwilę... Tutaj jest napisane, że to właśnie zgodnie z tą regułą piłkarze powinni rozgrywać rzuty karne w dogrywce, szachiści zmieniać się kolorami pionów w rozgrywkach, czy tenisiści serwować w tie-breaku. Wyeliminowałoby to problem przewagi osoby rozpoczynającej, dając tym samym sprawiedliwszą rozgrywkę. Zdumiewające!

A gdyby przydarzyło Ci się, drogi Czytelniku, spacerować po plaży razem z Alfredem i Bereniką, jaki sprawiedliwy ciąg losowań zaproponowałbyś dla trzech osób?

Przygotował Karol GRYSZKA

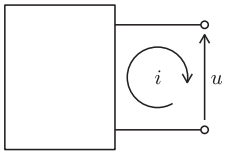


Podział monet wg Thuego–Morse’a

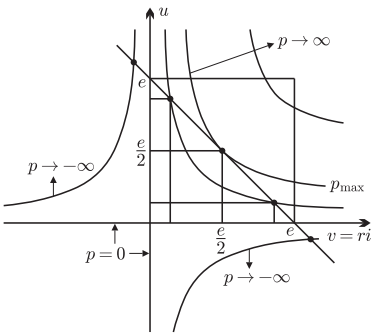
O ciągu Thuego–Morse’a pisaliśmy w *Delcie* 10/2016.

# Złoty podział odcinka a ładowanie akumulatora samochodowego

Maciej SIWCZYŃSKI\*



Rys. 1



Rys. 2



## Rozwiązanie zadania M 1512.

Niech  $[F]$  oznacza pole figury  $F$ .

Ponieważ  $K$  i  $N$  są środkami odcinków  $AB$  i  $AD$ , to  $KN \parallel BD$  oraz

$$2 \cdot KN = BD.$$

Podobnie otrzymujemy

$$2 \cdot LM = BD.$$

W takim razie czworokąt  $KLMN$  ma dwa boki równej długości i równoległe, więc jest równoległobokiem o środku  $S$ . Ponadto trójkąt  $ABD$  jest obrazem trójkąta  $AKN$  w jednokładności o środku  $A$  i skali 2, więc  $[ABD] = 4 \cdot [AKN]$ . Z analogicznych rozważań dla trójkątów  $BKL$ ,  $CLM$  i  $DMN$  otrzymujemy

$$4 \cdot [AKN] + 4 \cdot [BKL] +$$

$$+ 4 \cdot [CLM] + 4 \cdot [DMN] =$$

$$= [ADB] + [BAC] + [CBD] + [DCA] =$$

$$= 2 \cdot [ABCD].$$

Stąd mamy

$$[ABCD] = 2 \cdot [KLMN] = 8 \cdot [KLS].$$

Wiemy również, że

$$4 \cdot [BKL] = [BAC] \leq [ABCD].$$

W takim razie otrzymujemy

$$\begin{aligned} [KBS] &= [KBL] + [KLS] \leq \\ &\leq \frac{1}{4}[ABCD] + \frac{1}{8}[ABCD] = \\ &= \frac{3}{8}[ABCD] \end{aligned}$$

oraz

$$[KBS] \geq [KLS] = \frac{1}{8}[ABCD].$$

W takim razie

$$\frac{8}{3} \leq [ABCD] \leq 8.$$

Minimum jest osiągane dla czworokąta (zdegenerowanego), w którym wierzchołki  $A$ ,  $D$  i  $C$  są współliniowe (wówczas  $[ABC] = [ABCD]$ ), a maksimum — gdy wierzchołki  $A$ ,  $B$  i  $C$  są współliniowe (wówczas  $[ABC] = 0$ ).

Akumulator samochodowy jest jednym z wielu źródeł energii, jakie są używane w praktyce. Źródłami energii elektrycznej są również ogniwa, prądnice – maszyny prądu stałego, alternatory, turbogeneratory itd. Każde źródło energii elektrycznej możemy sobie wyobrazić jako „skrzynkę” dostępną z zewnątrz poprzez parę końcówek, zwanych też zaciskami, tworzących tzw. „port energetyczny” (rys. 1), na którym obserwuje się parę wielkości fizycznych nazywanych w technice **sygnałami**.

Dla źródła energii elektrycznej parę sygnałów stanowią napięcie elektryczne i natężenie prądu elektrycznego, które oznaczymy  $u$  oraz  $i$ . Iloczyn tych sygnałów stanowi moc chwilową:

$$p(t) = u(t)i(t).$$

Na ogół zarówno  $u$ ,  $i$ , jak i  $p$ , zależą od czasu, ale istnieje spora grupa źródeł energii, w których funkcje te są stałe w czasie (lub zmieniają się bardzo powoli) i dlatego nazywa się je źródłami napięcia (bądź prądu) stałego. Modele matematyczne takich źródeł są szczególnie proste, gdyż pomija się w nich zależność od czasu. Przykładami tego typu źródeł są ogniwa, prądnice prądu stałego, turbiny, ale również akumulatory samochodowe. Tymi ostatnimi zajmiemy się w tym artykule. Równanie opisujące akumulator, które wiąże ze sobą sygnały  $u$  – napięcie oraz  $i$  – natężenie prądu elektrycznego, ma postać

$$u + v = e,$$

gdzie  $e$  nazywa się „siłą elektromotoryczną” źródła, natomiast  $v = ri$ , gdzie  $r$  to tzw. opór wewnętrzny źródła. Równanie to na płaszczyźnie we współrzędnych  $(v, u)$  przedstawia prostą przechodzącą przez ćwiartki I, II i IV wyznaczoną przez punkty o współrzędnych  $(0, e)$  i  $(e, 0)$  (rys. 2). Pierwszy punkt nazywa się „punktem otwarcia” źródła – przy prądzie  $i = 0$ , drugi punkt to tzw. „punkt zwarcia” – przy  $u = 0$ . Napięcie elektryczne akumulatora przy  $i = 0$  nazywa się napięciem otwarcia  $u_o = e$ , a prąd przy  $u = 0$  – prądem zwarcia  $i_z = \frac{e}{r}$ .

Oprócz równania linii prostej we współrzędnych  $v, u$  występuje jeszcze jedno równanie energetyczne:

$$uv = pr,$$

gdzie  $p$  jest mocą wyprowadzaną z akumulatora. Jest to równanie hiperboli, która dla  $p > 0$ , gdy akumulator się rozładowuje, przechodzi tylko przez ćwiartkę I, a dla  $p < 0$ , gdy akumulator się ładuje, przez ćwiartki II i IV. Hiperbola ma wówczas dwie gałęzie, jak to widać na wykresie.

Wraz ze zmianą mocy  $p$  od  $-\infty$  do  $+\infty$  otrzymuje się całą rodzinę hiperbol. O tym, jaką wartość przyjmie moc  $p$  pobierana z akumulatora, decyduje czynnik zewnętrzny, czyli albo odbiornik energii, albo urządzenie ładujące źródło, przy czym własności akumulatora nakładają na możliwe wartości mocy pewne ograniczenia, których analizą się zajmujemy.

Rozpatrując proces pobierania energii z akumulatora, stawia się pytanie, kiedy moc  $p$  osiąga wartość maksimum. Poszukiwanie punktu maksimum  $p$  na wykresie polega na tym, aby spośród wszystkich prostokątów o bokach  $u, v$  opierających się o prostą  $u + v = e$ , czyli o tym samym obwodzie, wybrać ten, który będzie miał największe pole powierzchni. Oczywiście jest, że prostokąt ten musi być kwadratem. Jest to równoważne z tym, że funkcja

$$p(u) = \frac{1}{r}u(e - u)$$

osiąga maksimum w punkcie  $u = \frac{e}{2}$ . Punkt o współrzędnych

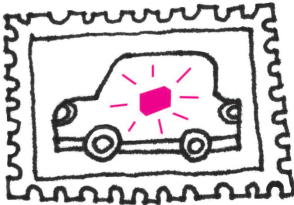
$$(u, v) = \left( \frac{e}{2}, \frac{e}{2} \right)$$

\*Instytut Elektrotechniki i Informatyki,  
Wydział Inżynierii Elektrycznej  
i Komputerowej, Politechnika Krakowska

nazywa się punktem dopasowania odbiornika energii do źródła (akumulatora). Współrzędne tego punktu wyznaczają wartość mocy maksymalnej otrzymywanej z akumulatora

$$p_{\max} = u_d i_d = \frac{1}{4} u_o i_z,$$

gdzie  $u_d := \frac{u_z}{2} = \frac{e}{2}$ ,  $i_d := \frac{i_z}{2} = \frac{e}{2r}$ . Zagadnienie dopasowania odbiorników do źródeł energii jest obszernym problemem technicznym i teoretycznym wymagającym zaangażowania bardziej rozwiniętego aparatu matematycznego (rachunek wariacyjny, analiza funkcjonalna). Ten problem znacznie się upraszcza i nazywa się dopasowaniem odbiornika do źródła napięcia stałego ze względu na maksimum pobieranej z niego mocy. W tym celu na rysunku 2 wyróżniamy dwa kwadraty: duży kwadrat, tzw. „otwarcio-zwarcioowy”, o polu powierzchni  $u_o i_z$  równym „mocy otwarcio-zwarcioowej” i mały kwadrat o polu powierzchni równym ćwiartce pola dużego kwadratu, a wynoszącym  $u_d i_d = \frac{1}{4} u_o i_z$ . Ten mały można nazwać kwadratem mocy maksymalnej, ponieważ przez jeden z jego wierzchołków przechodzi hiperbola mocy maksymalnej styczna do prostej  $u + v = e$ . Położone wyżej hiperbole, odpowiadające mocom  $p > p_{\max}$  nie mają punktów wspólnych z prostą napięciowo-prądową źródła, co oznacza, że akumulator nie jest w stanie dostarczyć takiej mocy. Liczba 4 staje się tym samym w teorii źródeł energii liczbą „magiczną”.



Punkty przecięć prostej  $u + v = e$  z hiperbolami rodziny  $uv = pr$  są **punktami współpracy** akumulatora z odbiornikiem bądź źródłem ładowania. Prosta przecina hiperbole w dwóch punktach w ćwiartkach II i IV (ładowanie akumulatora) albo w dwóch punktach w ćwiartce I (rozładowanie), albo w jednym punkcie (dopasowanie), albo ich nie przecina, gdy  $p > p_{\max}$ . Ilustruje to rozwiązanie układu równań akumulatora  $u + v = e$ ,  $uv = pr$ , który sprowadza się do równania kwadratowego dla napięcia lub prądu:

$$\left(\frac{u}{u_o}\right)^2 - \left(\frac{u}{u_o}\right) + \frac{x}{4} = 0 \quad \text{albo} \quad \left(\frac{i}{i_z}\right)^2 - \left(\frac{i}{i_z}\right) + \frac{x}{4} = 0,$$

gdzie  $u_o$ ,  $i_z$  – wcześniej zdefiniowane napięcie otwarcia i prąd zwarcia akumulatora, a

$$x = \frac{p}{p_{\max}}$$

jest tzw. ułamkiem obciążenia źródła. Stosunek ten nie może przekroczyć wartości 1, gdyż w przeciwnym razie otrzymywalibyśmy z akumulatora więcej mocy, niż jest on w stanie dostarczyć. Matematycznie oznaczałoby to, że wyróżnik równań kwadratowych  $\Delta = 1 - x$  byłby ujemny i równania te nie miałyby rzeczywistych rozwiązań. Jednak dla ujemnych  $x$  nie ma żadnego ograniczenia od dołu, może z wyjątkiem ograniczeń wynikających z wytrzymałości akumulatora na przeciążenie prądem lub napięciem. Ujemna wartość  $x$  odpowiada procesowi ładowania akumulatora z zewnętrznego źródła energii elektrycznej.

Przyjmijmy, że  $x = -4$  (magiczne minus 4) co oznacza, że akumulator ładowany jest z mocą równą polu powierzchni dużego kwadratu otwarcio-zwarcioowego. Wówczas równania kwadratowe przyjmą wspólną postać

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0,$$

a to jest równanie złotego podziału! Jednym z rozwiązań tego równania jest liczba opisująca złoty podział ( $\phi$  – symbol Fidiasza):

$$\phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1,618034.$$

Drugim rozwiązaniem równania kwadratowego jest  $-\phi^{-1}$ , otrzymujemy więc dwa rozwiązania, którym odpowiadają następujące wartości prądu i napięcia:

$$\begin{aligned} \frac{u}{u_o} = \phi & & \frac{i}{i_z} = 1 - \phi = -\phi^{-1} \\ \frac{u}{u_o} = -\phi^{-1} & \rightarrow & \frac{i}{i_z} = 1 + \phi^{-1} = \phi \end{aligned}$$



#### Rozwiązanie zadania F 916.

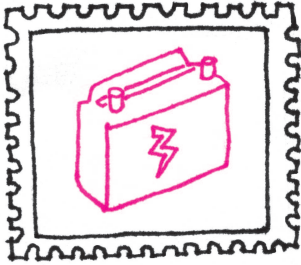
Ze względu na ogromną odległość do Słońca soczewka skupiająca wytworzy jego obraz w odległości praktycznie równej jej ogniskowej  $f$ . Średnica obrazu będzie równa  $d = 2f \cdot \tan(\alpha/2)$  i na krążku o tej średnicy zostanie skupiona cała moc padająca na powierzchnię soczewki – niech średnica soczewki wynosi  $D$ . Drewno ma małe przewodnictwo cieplne, przyjmijmy więc w grubym przybliżeniu, że głównym mechanizmem utraty ciepła z jego powierzchni będzie promieniowanie termiczne. Temperatura  $T$  powierzchni ustali się, gdy moc docierająca od Słońca na powierzchnię obrazu po skupieniu przez soczewkę będzie równa mocy wypromieniowanej przez powierzchnię obrazu. Mamy więc równanie:

$$\pi \frac{D^2}{4} W = \pi \frac{d^2}{4} \sigma T^4,$$

które pozwala nam obliczyć wartość temperatury obrazu Słońca. Warunkiem zapłonu jest  $T > T_0 = (300 + 273)$  K. Ostatecznie otrzymujemy:

$$\frac{D^2}{f^2} > 4 \tan^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) \frac{\sigma T_0^4}{W}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy warunek  $D/f > 0,022$ . W naszych obliczeniach, poza przewodnictwem ciepła w drewnie, pominęliśmy straty energii podczas przechodzenia promieniowania przez materiał soczewki oraz straty wynikające ze zjawiska konwekcji w powietrzu i wad optycznych soczewki (aberracja sferyczna i chromatyczna). Rzeczywisty stosunek  $D/f$  pozwalający za pomocą soczewki zapalić drewno jest z tych powodów 3 do 4 razy większy, niż to wynika z naszego oszacowania.



Punkty o tych współrzędnych leżą w ćwiartkach II i IV, co widać na rysunku 2. Korzystniejszą technicznie jest pierwsza para wartości ze względu na mniejszą wartość bezwzględną prądu ładowania (punkt w ćwiartce II). Zatem napięcie ładowania akumulatora  $u$  powinno być takie, aby  $\frac{u}{u_0} = \phi$ , co przy  $u_0 = e = 12$  V daje wartość około 19,416408 V („złote napięcie ładowania”). Warto zauważyć, że prąd ładowania odpowiadający „złotemu napięciu” jest dosyć duży i wynosi  $-\phi^{-1}i_z \approx -0,618034 \cdot i_z$  ( $i_z$  – prąd zwarcia). Nie jest to więc prąd mały, zważywszy, że prąd zwarcia płynący przez akumulator długotrwale może go uszkodzić. Badanie właściwości ładowania akumulatorów złotym napięciem bądź złotym prądem wymagałoby analizy wielu zjawisk fizykochemicznych, dynamicznych, cieplnych, itd. zachodzących w akumulatorze podczas ładowania. Autor w tym artykule nie podejmuje dyskusji na ten temat. Tutaj ograniczymy się do wyciągnięcia następującego wniosku sformułowanego w postaci twierdzenia:

*Napięcie (bądź prąd) ładowania akumulatora z mocą równą iloczynowi napięcia otwarcia i prądu zwarcia, równą czterokrotnej mocy maksymalnej – czyli równą polu powierzchni dużego kwadratu otwarcio-zwarcioowego – równe są  $\phi$  bądź  $-\phi^{-1}$  (złotej liczbie lub jej odwrotności) jednostek napięcia (lub prądu).*



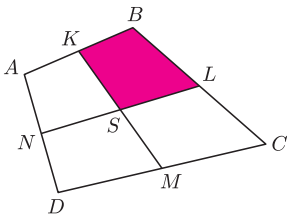
## Zadania

Redaguje Urszula PASTWA

**M 1510.** Z koła  $\omega$  losujemy 11 punktów (przy losowaniu każdy punkt koła jest jednakowo prawdopodobny). Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że istnieje taka średnica koła  $\omega$ , iż wszystkie wylosowane punkty leżą po tej samej jej stronie. Rozwiązanie na str. 7

**M 1511.** Znaleźć wszystkie liczby całkowite  $n$ , dla których liczba  $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$  jest kwadratem liczby całkowitej. Rozwiązanie na str. 23

**M 1512.** Punkty  $K$ ,  $L$ ,  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami boków  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  i  $DA$  czworokąta wypukłego  $ABCD$ . Odcinki  $KM$  i  $LN$  przecinają się w punkcie  $S$ . Znaleźć kres dolny i górny pola czworokąta  $ABCD$  przy założeniu, że pole czworokąta  $KBLS$  jest równe 1. Rozwiązanie na str. 12



Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 915.** Znajdź postać zależności prędkości  $c$  fali od jej długości  $\lambda$  dla fal na powierzchni głębokiego zbiornika nieściśliwej cieczy – to znaczy gdy głębokość zbiornika  $h \gg \lambda$  – w przypadku, gdy źródłem sił przywracających płaskość powierzchni jest:

- napięcie powierzchniowe,
- ciężar cieczy.

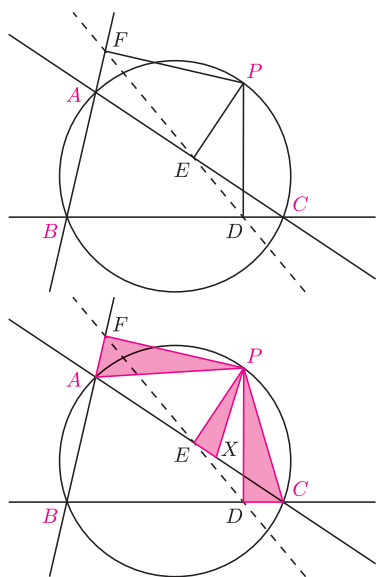
Ciecz ma gęstość  $\rho$ , współczynnik napięcia powierzchniowego ciecz-powietrze  $\sigma$ , a przyspieszenie siły ciężkości wynosi  $g$ . Rozwiązanie na str. 2

**F 916.** Oszacuj parametry soczewki skupiającej, którą można zapalić drewnianą drzazgę. Przyjmij, że temperatura zapłonu drewna wynosi około  $300^\circ\text{C}$ . W bezchmurny dzień na powierzchnię Ziemi dociera około  $W = 1$  kW/m<sup>2</sup> mocy promieniowania słonecznego; stała Boltzmanna to  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  W/(m<sup>2</sup>K<sup>4</sup>). Rozmiary kątowe tarczy słonecznej widzianej z Ziemi wynoszą około  $\alpha = 0,5^\circ$ . Rozwiązanie na str. 13

# O własnościach prostej Simsona

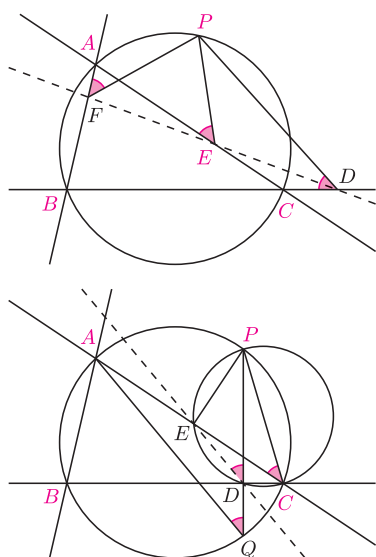
Dominik BUREK\*  
Tomasz CIEŚLA\*\*

\*student, Instytut Matematyki,  
Uniwersytet Jagielloński  
\*\*student, Wydział Matematyki,  
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet  
Warszawski



Kąt skierowany  $\sphericalangle(a, b)$  między prostymi  $a, b$  to kąt, o jaki należy obrócić prostą  $b$  przeciwnie do ruchu wskazówek zegara tak, aby stała się ona równoległa do prostej  $a$ .

Zorientowane pole trójkąta  $ABC$  jest: dodatnie, gdy wędrując wzdłuż łamanej  $ABC$ , poruszamy się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara; ujemne, gdy poruszamy się zgodnie z ruchem wskazówek zegara; zerowe, gdy punkty  $A, B, C$  są współliniowe.



W niniejszym artykule przybliżymy własności jednej z najsłynniejszych prostych w geometrii euklidesowej – prostej Simsona. Jej odkrycie przypisywane jest szkockiemu matematykowi, Robertowi Simsonowi, choć w żadnej jego pracy nie znajdujemy wzmianki o niej.

**Twierdzenie 1 (Simson).** *Dany jest trójkąt  $ABC$  wpisany w okrąg  $\omega$  oraz punkt  $P$  leżący na tym okręgu. Rzuty prostokątne punktu  $P$  na proste  $BC, CA, AB$  oznaczmy odpowiednio przez  $D, E, F$ . Wówczas punkty  $D, E, F$  leżą na jednej prostej. Prosta ta nazywana jest **prostą Simsona punktu  $P$  względem trójkąta  $ABC$** .*

*Dowód.* Zauważmy, że trójkąty prostokątne  $PAF$  i  $PCD$  są podobne. Rzeczywiście, wynika to z równości  $\sphericalangle PAF = \sphericalangle PCD$ , która jest konsekwencją tego, że punkty  $A, B, C, P$  leżą na jednym okręgu. Jest też jasne, że trójkąty te są tak samo zorientowane. Obierzmy na prostej  $AC$  taki punkt  $X$ , że trójkąt  $PXE$  jest podobny do trójkąta  $PAF$  i tak samo zorientowany. Przekształcenie będące złożeniem obrotu o kąt  $APF$  z jednokładnością o skali  $\frac{PF}{PA}$  przeprowadza punkty  $A, X, C$  odpowiednio na punkty  $F, E, D$ . Ponieważ obroty i jednokładności zachowują współliniowość punktów, więc ze współliniowości punktów  $A, X, C$  wynika współliniowość punktów  $F, E, D$ .  $\square$

Prawdziwe jest też twierdzenie odwrotne: jeśli punkty  $D, E, F$  są współliniowe, to punkt  $P$  leży na okręgu  $\omega$ . Dowód tego faktu jest dość podobny, nietrudno bowiem sprawdzić, że przy takich założeniach obrót o kąt  $FPA$  z jednokładnością o skali  $\frac{PA}{PF}$  przeprowadzi  $D$  na  $C$ , skąd wnioskujemy podobieństwo trójkątów  $PAF$  i  $PCD$  oraz tezę twierdzenia odwrotnego.

Jedno z ciekawych uogólnień prostej Simsona polega na rzutowaniu punktu  $P$  pod dowolnym (ustalonym) kątem. Mówi o tym następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 2.** *Dany jest trójkąt  $ABC$  wpisany w okrąg  $\omega$  i punkt  $P$  leżący na nim. Niech  $D, E, F$  będą takimi punktami odpowiednio na prostych  $BC, CA, AB$ , że zachodzą równości kątów skierowanych  $\sphericalangle(PD, BC) = \sphericalangle(PE, CA) = \sphericalangle(PF, AB)$ . Wówczas punkty  $D, E, F$  leżą na jednej prostej. Twierdzenie odwrotne również jest prawdziwe.*

Powyższe twierdzenie można udowodnić, wykorzystując analogiczny argument jak w twierdzeniu Simsona. Uzupełnienie szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi.

Inne uogólnienie twierdzenia Simsona można otrzymać, badając pola trójkątów o wierzchołkach będących rzutami dowolnego punktu płaszczyzny. Francuz Joseph Gergonne odkrył i jako pierwszy udowodnił poniższy fakt.

**Twierdzenie 3.** *Dane są trójkąt  $ABC$  wpisany w okrąg o środku  $O$  oraz liczba rzeczywista  $\lambda$ . Dla dowolnego punktu  $P$  oznaczmy jego rzuty na proste  $BC, CA, AB$  przez  $D, E, F$ . Zbiór punktów  $P$ , dla których zorientowane pole trójkąta  $DEF$  wynosi  $\lambda$ , jest albo zbiorem pustym, albo jednoelementowym zbiorem zawierającym punkt  $O$ , albo pewnym okręgiem o środku  $O$ .*

Dowód powyższego twierdzenia pominiemy, natomiast wywnioskujemy z niego twierdzenie Simsona. Przyjmując  $\lambda = 0$ , otrzymujemy, że wszystkie punkty, których rzuty na proste  $BC, CA, AB$  są współliniowe, tworzą pewien okrąg. Nietrudno przekonać się, że rzuty punktów  $A, B, C$  mają tę własność. Wobec tego okręgiem tym musi być okrąg opisany na trójkącie  $ABC$ .

Zanim przejdziemy do próby pokazania ciekawych zastosowań prostej Simsona, udowodnimy kilka interesujących faktów z nią związanych. Zaczniemy od niezwykle użytecznego faktu:

**Fakt 1.** *Dany jest trójkąt  $ABC$  wpisany w okrąg  $\omega$  oraz cięciwa  $PQ$  prostopadła do prostej  $BC$ . Wówczas prosta Simsona punktu  $P$  względem trójkąta  $ABC$  jest równoległa do prostej  $AQ$ .*

*Dowód.* Oznaczmy rzuty punktu  $P$  na proste  $BC$  i  $CA$  odpowiednio przez  $D$  i  $E$ . Punkty  $D$  i  $E$  leżą na okręgu o średnicy  $PC$ . Korzystając z tego, że kąty oparte na tym samym łuku są równe, otrzymujemy  $\sphericalangle PDE = \sphericalangle PCE = \sphericalangle PQA$ , skąd wynika równoległość prostych  $AQ$  i  $DE$ .  $\square$



Może się, oczywiście, zdarzyć, że nie istnieje cięciwa przechodząca przez  $P$ , która jest prostopadła do  $BC$ . Dzieje się tak dokładnie wtedy, gdy  $P$  jest jednym z końców średnicy równoległej do  $BC$ . W takim przypadku należy przyjąć  $P = Q$  i fakt pozostaje w mocy. Uzupełnienie szczegółów pozostawiamy Czytelnikowi.

Na szczególną uwagę zasługuje piękna zależność znaleziona przez szwajcarskiego matematyka Jakoba Steinera, która wiąże prostą Simsona z ortocentrum trójkąta.

**Twierdzenie 4 (Steiner).** *Punkt  $P$  leży na okręgu  $\omega$  opisanym na trójkącie  $ABC$ . Punkty  $X, Y$  i  $Z$  są obrazami punktu  $P$  w symetrii względem boków odpowiednio  $BC, CA$  i  $AB$ . Wówczas punkty  $X, Y$  i  $Z$  leżą na jednej prostej, która zawiera ortocentrum trójkąta  $ABC$ . Prosta tę zwykle się nazywa **prostą Steinera punktu  $P$  względem trójkąta  $ABC$** .*

*Dowód.* Niech  $H$  będzie ortocentrum trójkąta  $ABC$  i niech  $Q$  będzie takim punktem na  $\omega$ , że  $PQ \perp BC$ . Oznaczmy odbicie  $H$  względem  $BC$  przez  $D$ . Wówczas

$$\begin{aligned} \sphericalangle BDC &= \sphericalangle BHC = 180^\circ - \sphericalangle HCB - \sphericalangle CBH = \\ &= (90^\circ - \sphericalangle HCB) + (90^\circ - \sphericalangle CBH) = \\ &= \sphericalangle CBA + \sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle BAC, \end{aligned}$$

zatem  $D$  leży na  $\omega$ . Trapez  $HDXP$  jest równoramienny (jego osią symetrii jest prosta  $BC$ ), wobec tego  $\sphericalangle PXH = \sphericalangle DPX$ . Z drugiej strony trapez  $ADQP$  jest wpisany w okrąg, więc również jest równoramienny. Stąd  $\sphericalangle DPQ = \sphericalangle PQA$ . Z powyższych dwóch równości wynika, że  $HX \parallel AQ$ . Stąd i z poprzedniego faktu wnioskujemy, że prosta  $HX$  jest równoległa do prostej Simsona punktu  $P$ . Innymi słowy, punkt  $X$  leży na prostej  $\ell$  przechodzącej przez  $H$  i równoległej do prostej Simsona punktu  $P$ . Dokładnie ten sam argument pokazuje, że punkty  $Y, Z$  również leżą na  $\ell$ .  $\square$

Podobnie jak poprzednio, może się zdarzyć, że punkt  $Q$  nie będzie istniał. Twierdzenie Steinera pozostaje prawdziwe również w tym przypadku. Uzupełnienie szczegółów ponownie pozostawiamy Czytelnikowi.

Twierdzenie Steinera można przeformułować tak: jednokładność o środku w punkcie  $P$  i skali równej 2 przeprowadza prostą Simsona punktu  $P$  na prostą zawierającą ortocentrum trójkąta  $ABC$ . Wpływa stąd wniosek: prosta Simsona punktu  $P$  leżącego na okręgu opisanym na trójkącie  $ABC$  połowi odcinek  $PH$ , gdzie  $H$  jest ortocentrum trójkąta  $ABC$ . Ponadto środek odcinka  $PH$  leży na okręgu dziewięciu punktów trójkąta  $ABC$ . Aby to uzasadnić, wystarczy zauważyć, że skoro odbicia  $H$  względem boków trójkąta  $ABC$  leżą na okręgu opisanym, to okrąg dziewięciu punktów jest jednokładny względem  $H$  w skali  $\frac{1}{2}$  z okręgiem opisanym.

Można również badać relację między dwiema wybranymi prostymi Simsona.

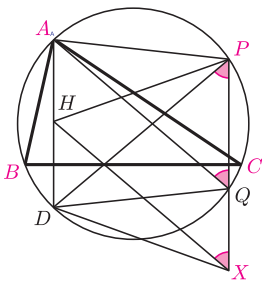
**Twierdzenie 5.** *Punkty  $P$  i  $Q$  leżą na okręgu  $\omega$  opisanym na trójkącie  $ABC$ . Wówczas miara kąta między prostymi Simsona punktów  $P$  i  $Q$  jest równa mierze kąta wpisanego opartego na łuku  $PQ$ .*

*Dowód.* Obierzmy punkty  $R$  i  $S$  na  $\omega$  tak, by cięciwy  $PR, QS$  były prostopadłe do prostej  $BC$ . Wówczas proste  $AR, AS$  są równoległe do prostych Simsona punktów  $P, Q$ . Wobec tego interesujący nas kąt równy jest kątowi między prostymi  $AR, AS$ . Ten kąt jest oparty na łuku  $RS$ , którego długość jest równa długości łuku  $PQ$ .  $\square$

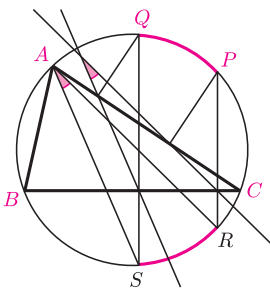
Tutaj również może zdarzyć się, że nie istnieją cięciwy  $PR, QS$  prostopadłe do prostej  $BC$  – uzupełnienie dowodu w tym przypadku pozostawiamy Czytelnikowi.

Z powyższych faktów w prosty sposób można wysnuć następujące wnioski:

- Trójkąt  $XYZ$  jest wpisany w okrąg opisany na trójkącie  $ABC$ . Wówczas proste Simsona punktów  $X, Y$  i  $Z$  względem trójkąta  $ABC$  ograniczają trójkąt podobny do trójkąta  $ABC$ .
- Proste Simsona dwóch punktów antypodycznych przecinają się pod kątem prostym.



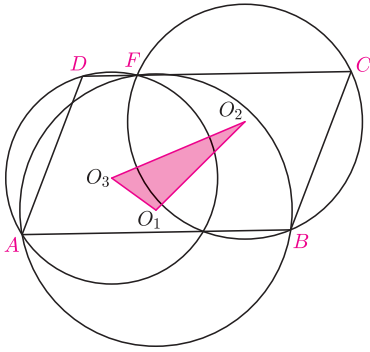
W dowolnym trójkącie spodki wysokości, środki boków oraz środki odcinków łączących ortocentrum z wierzchołkami leżą na jednym okręgu. Okrąg ten jest nazywany okręgiem dziewięciu punktów trójkąta  $ABC$ .



- W trójkącie  $ABC$  zbiór punktów przecięcia się prostych Simsona dwóch punktów antypodycznych jest jego okręgiem dziewięciu punktów.

Nadszedł czas na pokazanie zastosowań prostej Simsona w zadaniach olimpijskich. Część poniższych problemów pochodzi z olimpiad matematycznych o zasięgu międzynarodowym.

**Zadanie 1.** Dany jest równoległobok  $ABCD$  oraz punkt  $F$  leżący na odcinku  $CD$ . Punkty  $O_1, O_2$  i  $O_3$  są środkami okręgów opisanych na trójkątach  $ABF, BCF$  i  $ADF$ . Dowieść, że ortocentrum trójkąta  $O_1O_2O_3$  leży na prostej  $AB$ .

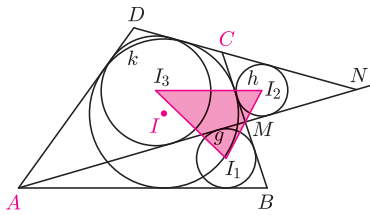


**Rozwiązanie.** Pokażemy najpierw, że punkty  $F, O_1, O_2, O_3$  leżą na jednym okręgu. Istotnie,

$$\begin{aligned} \sphericalangle O_3FO_2 &= 180^\circ - \sphericalangle DFO_3 - \sphericalangle O_2FC = \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle DAF) - \frac{1}{2}(180^\circ - 2\sphericalangle CBF) = \\ &= \sphericalangle DAF + \sphericalangle CBF = \sphericalangle AFB = 180^\circ - \sphericalangle O_2O_1O_3. \end{aligned}$$

(ostatnia równość wynika z faktu, że proste  $O_1O_2$  i  $O_1O_3$  są prostopadłe odpowiednio do  $FB$  i  $FA$ ). Na podstawie twierdzenia Steiner'a pozostaje uzasadnić, że odbicia punktu  $P$  względem boków trójkąta  $O_1O_2O_3$  leżą na prostej  $AB$ , jednakże jest to oczywiste, gdyż proste  $O_3O_1$  oraz  $O_2O_1$  są symetralnymi odcinków odpowiednio  $AF$  i  $FB$ .  $\square$

**Zadanie 2.** W czworokącie  $ABCD$  opisanym na okręgu prosta  $l$  przechodząca przez wierzchołek  $A$  przecina bok  $BC$  w punkcie  $M$  oraz półprostą  $DC^{\rightarrow}$  w punkcie  $N$ . Punkty  $I_1, I_2, I_3$  są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty  $ABM, MNC, NDA$ . Dowieść, że punkt przecięcia wysokości trójkąta  $I_1I_2I_3$  leży na prostej  $l$ .



**Rozwiązanie.** Niech prosta  $l$  przecina półprostą  $DC^{\rightarrow}$  w punkcie  $N$ . Trójki punktów  $I_1, M, I_2$  oraz  $I_3, I_2, M$  są, oczywiście, współliniowe. Oznaczmy przez  $E$  przecięcie prostych  $AM$  i drugiej stycznej poprowadzonej z punktu  $C$  do okręgu o środku w punkcie  $I_1$ . Łatwo zauważyć, że  $CE + AB = AE + BC$ , więc  $AE - CE = AB - BC = AD - CD$ . Oznacza to, że półprosta  $CE$  jest również styczna do okręgu o środku w punkcie  $I_3$ , stąd punkty  $I_1, E$  i  $I_3$  są współliniowe. Wobec tego

$$\sphericalangle I_1CI_3 = \frac{1}{2}\sphericalangle DCB = \frac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle MCN) = \sphericalangle NMI_2 + \sphericalangle I_2NM = \sphericalangle I_1I_2I_3,$$

więc na czworokącie  $I_1I_2CI_3$  można opisać okrąg. Aby dokończyć rozwiązanie, wystarczy zauważyć, że obrazy punktu  $C$  w symetrii względem prostych  $I_1I_2$  oraz  $I_2I_3$  leżą na prostej  $l$  i zastosować twierdzenie Steiner'a.  $\square$

Rozważane zadania szybko uległy twierdzeniu Steiner'a. Tak dzieje się z wieloma problemami dotyczącymi przynależności ortocentrum trójkąta do jakiejś prostej. Dla Czytelników Wnikliwych pozostawiamy kilka zadań, które pomogą zgłębić i odkryć jeszcze więcej własności prostej Simsona.

**Zadanie 3.** Dane są punkty  $A, B, C, D, E$ , takie, że czworokąt  $ABCD$  jest równoległobokiem, a czworokąt  $BCED$  jest wpisany w okrąg. Prosta  $l$  przechodząca przez  $A$  przecina wewnątrz odcinka  $CD$  w punkcie  $F$ , a prostą  $BC$  w punkcie  $G$ . Przypuśćmy, że  $EF = EG = EC$ . Wykazać, że  $l$  jest dwusieczną kąta  $DAB$ .

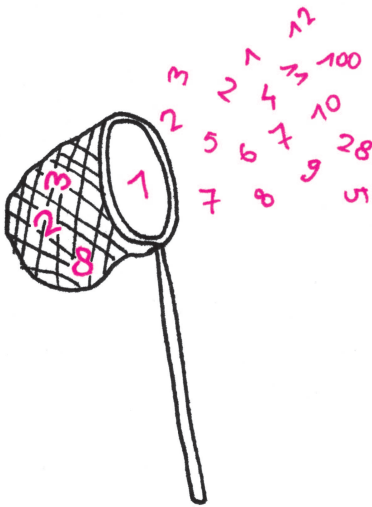
**Zadanie 4.** Dany jest trójkąt  $ABC$  wpisany w okrąg  $\omega$ . Punkt  $K \in \omega$  i punkt  $A$  leżą po przeciwnych stronach prostej  $BC$ . Punkty  $L, M$  są odbiciami punktu  $K$  względem  $AB, BC$ . Okrąg przechodzący przez punkty  $B, L, M$  przecina  $\omega$  po raz drugi w punkcie  $E$ . Punkt  $H$  jest ortocentrum trójkąta  $ABC$ . Wykazać, że proste  $KH, EM, BC$  mają punkt wspólny.

**Zadanie 5.** W trójkącie  $ABC$  okrąg wpisany jest styczny do boków  $BC, CA$  i  $AB$  w punktach odpowiednio  $D, E$  i  $F$ . Punkt  $F$  jest punktem Feuerbacha trójkąta  $ABC$ . Wówczas prosta Simsona punktu  $P$  względem trójkąta  $DEF$  jest równoległa do prostej  $OI$ , która łączy środki  $O$  i  $I$  – okręgów opisanego i wpisanego trójkąta  $ABC$ .

W każdym trójkącie okrąg wpisany jest styczny do okręgu dziewięciu punktów. Ich punkt wspólny nazywany jest punktem Feuerbacha.

# Polowanie na ciągi

Bartłomiej PAWLIK\*



W 1964 roku amerykańsko-brytyjski matematyk Neil Sloane zaczął kolekcjonować znane ciągi liczb całkowitych. Niewinne hobby, motywowane zbadaniem własności kilku ciągów, które pojawiły się podczas pracy nad jego rozprawą doktorską, szybko przerodziło się w duże przedsięwzięcie. W efekcie zostały opublikowane dwie książki *A Handbook of Integer Sequences* (wydana w roku 1973, zawierająca 2372 ciągi) oraz *The Encyclopedia of Integer Sequences* (z 1995 roku, 5847 ciągów). W 1996 roku, gdy liczba zgromadzonych ciągów przekroczyła 10 000, dalsze ich przechowywanie w postaci książkowej stało się bardzo niepraktyczne. Sloane postanowił stworzyć internetową bazę ciągów, dziś figurującą pod nazwą OEIS (*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*). Baza zawiera obecnie około 270 000 ciągów i, aby uświadomić sobie jej wartość jako przydatnego narzędzia w pracy badawczej, wystarczy wspomnieć, że już ponad 4500 artykułów naukowych zawiera informację: *Otrzymanie tego wyniku nie byłoby możliwe bez pomocy OEIS*.

Znalezienie nietrywialnego ciągu liczb całkowitych, który nie figuruje na wspomnianej liście, nie jest łatwym zadaniem. W niniejszym tekście zaprezentuję, w jaki sposób udało się upolować jeden okaz. Polowanie zaczniemy od próby znalezienia odpowiedzi na właściwie błahe pytanie:

*Ile jest liczb naturalnych  $k$ , takich, że liczba  $k!$  ma dokładnie  $k$  cyfr?*

$k$	$k!$	$\lambda(k!)$
0	1	1
1	1	1
2	2	1
3	6	1
4	24	2
5	120	3
6	720	3
7	5040	4
8	40320	5
9	362880	6

Niech  $\lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  będzie funkcją określającą liczbę cyfr danej liczby (przykładowo  $\lambda(2016) = 4$ ). Powyższe pytanie możemy sformułować teraz w następujący sposób: ile rozwiązań ma równanie  $k = \lambda(k!)$ ? Tabela obok przedstawia wartości funkcji  $\lambda(k!)$  dla małych  $k$ .

Jak widać, wśród liczb jednocyfrowych jest tylko jedno rozwiązanie (liczba 1! ma dokładnie jedną cyfrę). Bardzo szybki wzrost wartości funkcji  $k!$  sprawia, że poszukiwanie większych rozwiązań „na piechotę” jest niezwykle nieporęczne. Z drugiej strony szybki wzrost sugeruje, że liczba rozwiązań jest skończona. Zauważmy, że liczba  $100!$  ma o dwie cyfry więcej niż  $99!$ . Ujmując to nieco ogólniej, jeżeli  $100 \leq k < 1000$ , to

$$\lambda((k-1)!) + 2 \leq \lambda(k!) \leq \lambda((k-1)!) + 3.$$

Powyższa nierówność wynika z faktu, że gdy pomnożymy dowolną liczbę przez liczbę trzycyfrową, liczba jej cyfr zwiększy się o 2 lub 3. Najmniejsze  $k$ , takie, że  $\lambda(k!) = \lambda((k-1)!) + 3$ , to  $k = 104$ .

Z powyższych nierówności wynika oszacowanie:

$$\lambda(200!) \geq \lambda(100!) + 2 \cdot 100 = \lambda(100!) + 200 > 200,$$

czyli liczba  $200!$  ma więcej niż 200 cyfr. Co więcej, dla każdego  $k$  większego od 200 liczba  $k!$  ma więcej niż  $k$  cyfr. Zatem jeżeli istnieją różne od 1 rozwiązania równania  $k = \lambda(k!)$ , to są one na pewno mniejsze od 200.

Problem znalezienia wszystkich rozwiązań sprowadziliśmy do zbadania liczb z zakresu od 10 do 199. Jednak przeprowadzenie bezpośrednich obliczeń wciąż byłoby całkiem czasochłonne (ze względu na bardzo duże wartości liczby  $k!$  nawet dla niewielkich  $k$ ). Znajdźmy sposób!

Niech  $\mathbb{N}! = \{0!, 1!, 2!, 3!, \dots\}$  będzie zbiorem silni liczb naturalnych. Funkcja  $\lambda$  jest niemalejąca na zbiorze  $\mathbb{N}!$  (podobnie jak na zbiorze  $\mathbb{N}$ ), a po usunięciu z tego zbioru pierwszych sześciu elementów jest na nim rosnąca. Szukanie rozwiązań równania  $k = \lambda(k!)$  dla  $k \in \{10, 11, \dots, 199\}$  można efektywnie przeprowadzić metodą *bisekcji* (tj. sprawdzić, czy rozwiązaniem jest element leżący mniej więcej w środku tego zbioru, a jeśli nie, to biorąc pod uwagę wartość funkcji  $\lambda$  dla tego

Czytelniku Wnikliwy, zechciej uzasadnić, że jeżeli istnieje rozwiązanie większe od 100, to jest ono jedyne, a jeżeli istnieje rozwiązanie mniejsze lub równe 100, to wszystkie pozostałe rozwiązania (poza liczbą 1) będą znajdowały się w jego ścisłym otoczeniu (w tym sensie, że będą tworzyły ciąg  $k_0, k_1, \dots, k_i$  kolejnych liczb naturalnych).

\*doktorant, Zakład Algebry, Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska

elementu, ograniczyć przeszukiwany zbiór do liczb mniejszych lub większych od tego sprawdzonego elementu).

Przedstawmy kilka początkowych kroków zastosowania tego algorytmu.

$\lambda(100!) = 158$ . Liczba  $100!$  ma 158 cyfr w zapisie dziesiętnym, czyli wszystkie potencjalne rozwiązania będą znajdowały się w zbiorze  $\{10, 11, \dots, 99\}$ .

$\lambda(50!) = 65$ , więc wszystkie potencjalne rozwiązania będą znajdowały się w zbiorze  $\{10, 11, \dots, 49\}$ . Kontynuując to rozumowanie, dochodzimy do wniosku, że jedynymi liczbami naturalnymi  $k$ , takimi, że liczba  $k!$  ma dokładnie  $k$  cyfr, są 1, 22, 23 i 24.

Czy to już wszystko? Czy odpowiedź na pytanie będące załączkiem polowania jest kompletna? A co by było, gdybyśmy rozważyli liczby zapisane w innych systemach pozycyjnych?

Odpowiedź na pytanie, ile jest liczb naturalnych  $k$ , takich, że  $k!$  ma dokładnie  $k$  cyfr, zależy, oczywiście, od podstawy systemu pozycyjnego, w którym rozpatrujemy liczbę  $k$ . Niech  $\lambda_n(k)$  oznacza liczbę cyfr liczby  $k$  w systemie pozycyjnym o podstawie  $n$  oraz niech  $\Lambda(n)$  oznacza liczbę takich liczb naturalnych  $k$ , że liczba  $k!$  ma dokładnie  $k$  cyfr w zapisie w systemie pozycyjnym o podstawie  $n$ . Czyli  $\Lambda(1) = 2$  oraz  $\Lambda(10) = 4$  (co udowodniliśmy wcześniej).  $\Lambda(n)$  jest liczbą rozwiązań równania

$$k = \lambda_n(k!), \text{ dla } n \geq 2.$$

Przez  $\Lambda_n$  oznaczymy ciąg wartości funkcji  $\Lambda$ . Jest to ciąg opisujący liczbę liczb  $k$ , takich, że liczba  $k!$  ma dokładnie  $k$  cyfr w zależności od podstawy rozpatrywanego systemu pozycyjnego. I to jest właśnie ten ciąg, który padł ofiarą naszego polowania! Teraz można pokusić się o zbadanie pewnych jego własności, co pozostawiamy jako zadanie dla Czytelnika Niezmęczonego.

- (1) Wartości ciągu  $\Lambda_n$  rosną bardzo powoli. Czy istnieje jakieś ograniczenie górne tego ciągu? Jeżeli tak, to jakie?
- (2) Dla jakich liczb naturalnych  $k$ , liczba  $k!$  nie ma  $k$  cyfr w żadnym systemie pozycyjnym?
- (3)\*\*\* Tablica obok sugeruje, że wraz ze wzrostem liczby  $n$  (czyli podstawy systemu pozycyjnego), wszystkie nietrywialne (różne od 1) rozwiązania równania

$$k = \lfloor \log_n(k!) \rfloor + 1$$

zbliżają się do liczby  $e \cdot n$ . Utwierdzająca w tym przekonaniu może być tablica rozwiązań dla początkowych potęg liczby 10:

$n$	$\Lambda_n$	Rozwiązania
1	2	1, 2
10	4	1, 22, 23, 24
100	6	1, 264-268
1000	8	1, 2707-2713
10000	10	1, 27168-27176

Formalnie ten wniosek można zapisać w postaci

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \log_n[en]! \rfloor + 1}{en} = 1.$$

Czytelniku Poszukujący, spróbuj to udowodnić (np. stosując wzór Stirlinga).

$$1! = 1$$

$$22! = 1\ 124\ 000\ 727\ 777\ 607\ 680\ 000$$

$$23! = 25\ 852\ 016\ 738\ 884\ 976\ 640\ 000$$

$$24! = 620\ 448\ 401\ 733\ 239\ 439\ 360\ 000$$

Liczby 1, 22, 23 i 24 są pierwszymi czterema elementami bardzo ciekawego nieskończonego ciągu liczb naturalnych  $k$ , takich, że liczba cyfr liczby  $k!$  jest podzielna przez liczbę  $k$  (figurującego w OEIS pod numerem A058814).

W standardowym systemie pozycyjnym 2016 oznacza liczbę

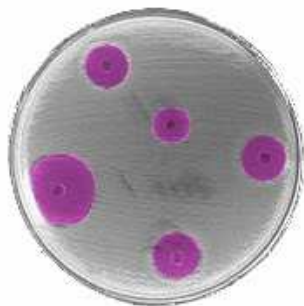
$$(2016)_{10} = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 6.$$

Ta sama liczba w systemie pozycyjnym o podstawie 5 wygląda tak:

$$2016 = 3 \cdot 5^4 + 1 \cdot 5^3 + 0 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1 = (31031)_5.$$

W systemie pozycyjnym o podstawie 1 (system unarny) do zapisu liczb stosuje się wyłącznie jeden znak. Kolejne liczby tworzy się przez powtarzanie tego znaku.

$n$	$\Lambda_n$	Rozwiązania	$n$	$\Lambda_n$	Rozwiązania
1	2	1,2	26	4	1,65,66,67
2	3	1,2,3	27	5	1,67,68,69,70
3	3	1,5,6	28	4	1,70,71,72
4	3	1,7,8	29	4	1,73,74,75
5	3	1,10,11	30	5	1,75,76,77,78
6	3	1,12,13	31	5	1,78,79,80,81
7	3	1,15,16	32	4	1,81,82,83
8	4	1,17,18,19	33	5	1,83,84,85,86
9	3	1,20,21	34	5	1,86,87,88,89
10	4	1,22,23,24	35	4	1,89,90,91
11	4	1,25,26,27	36	5	1,91,92,93,94
12	3	1,28,29	37	5	1,94,95,96,97
13	4	1,30,31,32	38	5	1,97,98,99,100
14	4	1,33,34,35	39	5	1,99,100,101,102
15	4	1,35,36,37	40	5	1,102,103,104,105
16	4	1,38,39,40	41	5	1,105,106,107,108
17	4	1,41,42,43	42	5	1,107,108,109,110
18	5	1,43,44,45,46	43	5	1,110,111,112,113
19	4	1,46,47,48	44	5	1,113,114,115,116
20	4	1,49,50,51	45	4	1,116,117,118
21	5	1,51,52,53,54	46	5	1,118,119,120,121
22	4	1,54,55,56	47	5	1,121,122,123,124
23	4	1,57,58,59	48	5	1,124,125,126,127
24	5	1,59,60,61,62	49	5	1,126,127,128,129
25	4	1,62,63,64	50	5	1,129,130,131,132



## Mamy problem

Powszechnie wiadomo, że *mamy problem*, nie wiem tylko dokąd trzeba go zgłaszać, kosmonauci przynajmniej mieli Houston.

Historia odkrycia antybiotyków zaczyna się od przypadku i niechcianego niechlujstwa. Podobno Aleksander Fleming, brytyjski mikrobiolog, po wakacjach (1928) przeglądał stare płytki Petriego, na których rosły kolonie chorobotwórczych bakterii *Staphylococcus*. Na jednej płytce zauważył strefę hamowania wzrostu bakterii, a obok pleśń, potem zidentyfikowaną jako *Penicillium notatum*. Założył, że pleśń wydziela substancję hamującą wzrost bakterii.

Pierwszy odkrywca nie zlekceważył rzadkiego i nieoczekiwanego zjawiska. Gdyby Fleming kazał umyć płytki i uznał, że to był przypadek, na odkrycie penicyliny musielibyśmy jeszcze poczekać. Ale ten przyszły noblista (1945) zdał sobie sprawę z medycznego znaczenia odkrycia. Opracowanie metody oczyszczania penicyliny i wytworzenia jej w formie leku trwało długo, przyspieszyła je II wojna światowa i fakt masowej śmierci rannych na frontach (to w temacie: o pożytkach z wojen!).

Równoległe odkrywanie nowych antybiotyków (działają tylko na bakterie i grzyby, szczęśliwie dla medycyny nie niszczą komórek ludzkich i zwierzęcych, choć mogą wykazywać efekt alergiczny) oraz biologicznych mechanizmów ich syntezy stały się zaczątkiem szybkiego rozwoju przemysłu farmaceutycznego wykorzystującego fermentację i syntezy chemiczne. Samych rodzajów penicyliny jest dziś wiele: naturalne penicylina G i V, półsyntetyczne amoksycylina, ampicylina, flukloksacylina i inne.

Niestety, bardzo szybko okazało się, że atakowane przez antybiotyk bakterie i grzyby mutują do szczepów opornych, do których trzeba odkrywać kolejny antybiotyk. Jeszcze groźniejsze jest zjawisko horyzontalnego przekazywania genetycznej oporności na dany antybiotyk, co w praktyce szpitalnej stanowi wielkie wyzwanie. Przekazywane są elementy genetyczne kodujące oporność z bakterii do bakterii, nawet niekoniecznie tego samego gatunku. W tym samym szczepie może nagromadzić się kilka oporności na różne antybiotyki. Typowa wojna atak–obrona: po jednej stronie mikroorganizmy, po drugiej mądry ludzki z coraz lepiej wyposażonymi laboratoriami. Kto wygra?

Wręcz „cudowne” wyzdrowienia po zastosowaniu antybiotyków uspiły czujność i lekarzy, i pacjentów. Zaczęto bardziej i mniej świadomie nadużywać tych leków, ordynując je w stosunku do patogenów, na które antybiotyk nie działa (wirusy), przyjmując zbyt krótko (wtedy powstają mutanty odporne) i bez kontroli lekarza. W trójkącie pacjent–patogen–lekarz wszystkie czynniki podlegały dynamicznym zmianom. W dodatku zaczęto na masową skalę stosować antybiotyki nie tylko do leczenia zwierząt, ale także w źle pojętej weterynaryjnej profilaktyce i w dążeniu do lepszych wyników hodowli drobiu czy trzody. Selekcja mutantów opornych następowała w dużej skali w środowisku naturalnym – antybiotyki można znaleźć w paszy, glebie, wodach.

Wciąż brak naprawdę szybkich metod analizy ewoluującej oporności mikroorganizmów, co w masowej skali jest kosztowne, nie starcza też wykwalifikowanej kadry i prawidłowo wyposażonych laboratoriów. Problem jest globalny, ocenia się, że rozprzestrzenienie się nowego mutantu na całym świecie trwa najwyżej 2 lata, więc wyjście z sytuacji powinno być znajdowane też globalnie, a nie tylko w najbogatszych krajach świata. A WHO (Międzynarodowa Organizacja Zdrowia) grozi, iż narastanie oporności na antybiotyki prowadzi do katastrofy porównywalnej z globalnym ociepleniem i terroryzmem.

Od odkrycia penicyliny minęło 90 lat, od wprowadzenia jej na rynek około 70, a okrzyk *mamy problem!* stał się dziś dramatyczny.

Magdalena FIKUS

21 września w siedzibie ONZ odbyła się sesja poświęcona nadużywaniu antybiotyków. Obecnie dane wskazują, że 80% antybiotyków trafia nie do lecznictwa, lecz do hodowli zwierząt. Na wyprodukowanie jednego kilograma mięsa bydłęcego, drobiowego i wieprzowego zużywa się – odpowiednio – 45, 148 i 172 miligramy antybiotyków. W skali globu w 2010 roku spożytkowane w ten sposób zostało ich 63 000 ton. Najgroźniejsze doniesienia pochodzą z Chin: podaje się, że są regiony, gdzie w nurtach rzek poniżej fabryk farmaceutycznych stężenie antybiotyków jest 10 000 razy wyższe niż stężenia stosowane w medycynie; w leczniczych stężeniach antybiotyki trafiają się nawet w wodzie z kranu. Odporne na antybiotyki bakterie i zakażone nimi zwierzęta zasiedlają dziś już oceany i rzeki na całym świecie.

## Akustyczne hologramy

Holografia optyczna znalazła bardzo wiele zastosowań. Choć matematyczny opis tej techniki może wydawać się skomplikowany, to jej idea jest bardzo prosta. Z codziennego doświadczenia wiemy, że trójwymiarową scenę można obserwować przez szybkę. To oznacza, że na powierzchni szybki musi być dostępna informacja o tym, co przez nią można zobaczyć. Zmieniając kąt patrzenia, dostrzegamy trójwymiarowość sceny. Hologram to nic innego jak utrwalenie takiej informacji w taki sposób, że oświetlenie go falą płaską odtwarza falę, która „wychodziłaby” z jego powierzchni, gdyby scena za nią była. Analogia z szybką uzmysławia również jedną z najbardziej efektywnych własności hologramu. Widok można odtworzyć również za pomocą jego fragmentu, tak jak całą scenę można zobaczyć przez fragment szybki. Jednak, ze względu na skończoną dokładność zapisu, widok odtwarzany przez coraz mniejsze fragmenty jest coraz mniej wyraźny.

Hologram akustyczny to podobna technika odtwarzania frontu fali dźwiękowej. Obecnie używa się szyku (macierzy) niezależnie modulowanych przetworników elektroakustycznych (ang. *phased array transducers* – PATs). Technika ta ma dwa ograniczenia i jedną dodatkową zaletę. Z jednej strony, nie pozwala na uzyskiwanie wysokiej rozdzielczości, a dążenie do jej maksymalizacji wiąże się z lawinowo rosnącymi kosztami. Z drugiej strony, pozwala na dynamiczną zmianę generowanej fali dźwiękowej. Należy zauważyć, że w takim przypadku akustyczny hologram istnieje tylko w postaci cyfrowego zapisu amplitudy, częstości i fazy sygnałów odtwarzanych przez poszczególne głośniczki.

Niedawno zademonstrowano [1], że rezygnacja z dynamiki pozwala na przezwyciężenie obu ograniczeń jednocześnie i to w zaskakująco prosty sposób. Chodzi o tworzenie materialnych hologramów, za pomocą których falę dźwiękową można odtworzyć, używając tylko jednego głośnika. Hologramy te nadal nie są rejestracją jakiejś fali, tylko powstają na podstawie obliczeń dotyczących tego, co chce się uzyskać. Z ich oraz trójwymiarowej drukarki pomocą tworzona jest płytka z materiału o innej prędkości rozchodzenia się dźwięku niż ośrodek, w którym efekt ma być obserwowany. Umieszczenie za płytką głośniczka, generującego płaską falę dźwiękową, daje oczekiwany rezultat. W tym miejscu wypada zakrzyknąć „szkoda, że Państwo tego nie widzą!” (Bez problemu jednak, przynajmniej część, zobaczyć można – [2]). Choć generowana fala nie zmienia się, to może służyć do manipulacji obiektami. Na początku filmu widzimy, jak małe stateczki z papieru pływają w kółko po okrągłym wybrzuszeniu powierzchni płynu. Wykonalne jest uzyskanie różnych pól ciśnienia w różnych odległościach od hologramu. Zademonstrowane to zostało poprzez uzyskanie obrazów cyfr 1, 2 i 3 w centymetrowych odstępach. Można doprowadzić do lewitacji kropelek w powietrzu albo pozwolić im się rozbić i wizualizować trójwymiarowe pole ciśnienia za pomocą ich rozprysku.

Autorzy pracy [1] wyrazili w wywiadach zdziwienie, że nikt przed nimi nie wpadł na podobny sposób tworzenia akustycznych hologramów. Wskazali również na szereg potencjalnych zastosowań proponowanej techniki. Jej głównymi zaletami są: zdolność rozdzielcza ograniczona jedynie długością fali dźwiękowej oraz niski koszt. Przewidują np., że pomysł może zostać użyty do bardziej precyzyjnego niż dotychczas ultradźwiękowego rozbijania kamieni nerkowych.

Jeszcze jednym sposobem efektywnej wizualizacji fali dźwiękowej generowanej przez hologram jest migracja drobiny do minimum ciśnienia akustycznego. Za jego pomocą autorzy pokazali tworzenie się kopii rysunku *Gołębia Pokoju* Picassa po włączeniu głośniczka i jego rozmazywanie po wyłączeniu.

## Piśmienne gołębie

Gołąb swoje symboliczne znaczenie zawdzięcza najprawdopodobniej nie tyle samemu udomowieniu gołębia skalnego kilka tysięcy lat temu, co przypuszczalnej tego korzyści: wybitnej zdolności powrotu do gniazda, od wieków wykorzystywanej do przekazywania informacji.

Fizyczne podstawy tej zdolności pomimo lat badań i wieków selekcji, nie są jednoznacznie poznane. Pewną rolę odgrywa magnetorecepcja, ale związek przyczynowo-skutkowy udało się wykazać jedynie przy odróżnianiu zwrotów do i od bieguna.

Przypuszcza się, że jednym z czynników jest zdolność rozpoznawania topografii. Możliwe, że wyewoluowała ona dzięki przewodze, jaką dawało skuteczne odnajdywanie gniazda ukrytego w skalnej ścianie.

Ostatnio wykazano, że gołębie nie tylko są „sposrtegawcze”, ale mają również zdolności ortograficzne. Ptaki zostały nauczone odróżniania kilkudziesięciu angielskich słów czteroliterowych od kilku tysięcy czteroliterowych zestawów liter niebędących poprawnymi słowami. Następnie, żeby sprawdzić, czy gołębie „tylko” zapamiętały słowa, czy też potrafią wybierać ortograficzne zestawy liter spośród nieortograficznych, zaczęto im pokazywać nieznanne zestawy. Prawidłowe angielskie słowa rozpoznawane były lepiej, niż wynikałoby to z losowości. Jest to pierwszy przypadek wykazania tego typu zdolności u nienaczelných.

Nie przeprowadzono dotąd badań, czy gołębie pocztowe zachowują tajemnicę korespondencji.

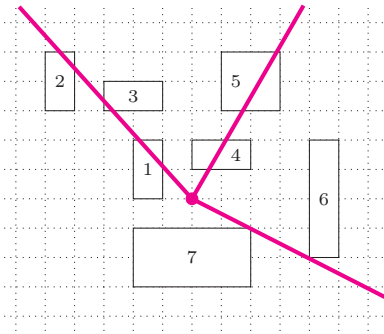
Piotr ZALEWSKI

[1] K. Melde, A.G. Mark, T. Qiu oraz P. Fischer; *Holograms for acoustics*; *Nature* **537**(2016)518-522; doi:10.1038/nature19755

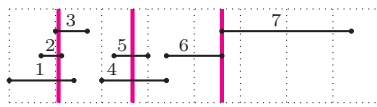
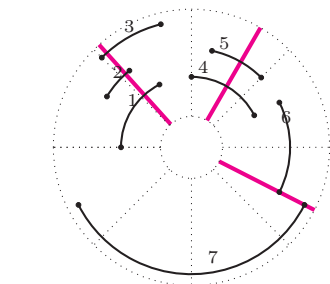
[2] *Acoustic Holograms: Moving Objects With Sound*; <https://www.youtube.com/watch?v=WNZdCivNeJc>

[3] D. Scarfa, K. Boy, A. Uber Reinert, J. Devine, O. Gütürkün oraz M. Colombo; *Orthographic processing in pigeons (Columba livia)*; *PNAS* (2016)201607870; doi:10.1073/pnas.1607870113

## Informatyczny kącik olimpijski (99): Kosmita



Rys. 1. W mieście znajduje się siedem budynków. Aby zniszczyć je wszystkie, wystarczy, że kosmita użyje działa trzy razy.



Rys 2. Zbiór przedziałów na okręgu odpowiadających budynkom z rysunku 1 oraz ten sam zbiór na odcinku po rozcięciu okręgu. Przedziały w kolejności rozpatrywania przez algorytm zachłanny to 2, 1, 3, 5, 4, 6, 7; algorytm strzeli w końcu przedziałów 2, 5 i 6.

Spróbujmy uogólnić ten pomysł w przypadku, gdy nie mamy dobrego kandydata na rozcięcie okręgu. Zauważmy, że i w tym przypadku istnieje rozwiązanie optymalne, w którym strzelamy jedynie w końcu przedziałów. Istotnie: każdy strzał przecinający pewien zbiór przedziałów można przesunąć na koniec tego przedziału ze zbioru, który kończy się najwcześniej. Dostajemy zatem rozwiązanie o złożoności czasowej  $O(n^2)$ : dla każdego z przedziałów sprawdzamy, ile strzałów musimy zużyć, jeśli strzelimy w koniec tego przedziału (rozcinając tym samym okrąg), a w pozostałe przedziały strzelając zgodnie z algorytmem zachłannym.

Niech  $s$  będzie optymalną liczbą strzałów. Z powyższych rozważań wynika, że koniec danego przedziału albo należy do pewnego optymalnego rozwiązania, albo strzelając w niego, uzyskamy rozwiązanie o liczbie strzałów  $s + 1$ . Kluczowe jest teraz znalezienie co najmniej jednego „optymalnego” przedziału.

W tym celu zdefiniujemy tablicę  $next[p]$ , która dla przedziału  $p$  oznacza przedział o najwcześniejszym końcu spośród przedziałów, których początek leży za

W listopadowym kąciku omawiamy zadanie *Kosmita* z Internetowych Mistrzostw Polski w Programowaniu z roku 2006. Zgodnie z treścią zadania tym razem nie będziemy ratowali świata, ale mamy pomóc kosmicie, który wylądował w centrum miasta swoim statkiem, chce się totalnie zniszczyć. W tym celu użyje on potężnego działa laserowego, którego promień jest w stanie zniszczyć wszystko, co znajdzie się na jego drodze. Do nas należy wyznaczenie minimalnej liczby strzałów potrzebnej do zniszczenia wszystkich  $n$  budynków w mieście. Każdy budynek możemy utożsamić z pewnym prostokątem o bokach równoległych do osi prostokątnego układu współrzędnych; wystarczy, że promień lasera dotknie dowolnego punktu takiego prostokąta (rys. 1).

Zauważmy, że zbiór promieni, które mogą zniszczyć ustalony budynek, tworzy pewien kąt. Aby go wyznaczyć, wystarczy rozpatrzyć cztery promienie przechodzące przez wierzchołki prostokąta odpowiadającego budynkowi. Co więcej, konkretny kształt i położenie budynku nie jest istotne – wystarczy nam jedynie znajomość wspomnianego kąta.

Zatem pierwsze, co zrobimy, to zamienimy geometryczny problem na płaszczyźnie dwuwymiarowej na równoważny problem jednowymiarowy na okręgu (rys. 2). W tym problemie mamy dane  $n$  przedziałów na okręgu (odpowiadających kątom dla budynków). Należy znaleźć minimalną liczbę półprostych wychodzących ze środka okręgu („strzałów”), tak by każdy przedział był przecięty co najmniej jedną półprostą.

Na rozgrzewkę rozwiążemy prostszą wersję tego problemu. Jeżeli istnieje półprosta wychodząca ze środka okręgu i nieprzecinająca żadnego z przedziałów, to możemy rozciąć okrąg wzdłuż tej półprostej i rozwiązać zadanie na odcinku. Nietrudno się przekonać, że działa wtedy następujące rozwiązanie zachłanne. Sortujemy przedziały niemalejąco po prawych końcach, a następnie przeglądamy je w tej właśnie kolejności. Za każdym razem, gdy natrafiamy na przedział, w który jeszcze nie strzelaliśmy (tzn. którego początek znajduje się za ostatnim strzałem), musimy wykonać nowy strzał; oplaca nam się to zrobić jak najdalej, czyli na końcu tego przedziału. Takie rozwiązanie będzie działać w czasie  $O(n \log n)$ .

końcem przedziału  $p$ . Mając przedziały posortowane po końcach, tablicę  $next$  można wyznaczyć w czasie  $O(n)$ , poruszając się po okręgu dwoma wskaźnikami. Zauważmy, że jeśli zaczynamy od przedziału  $p$ , to zgodnie z rozwiązaniem zachłannym będziemy strzelać w przedziały  $p, next[p], next[next[p]], \dots$ , aż obejdziemy cały okrąg.

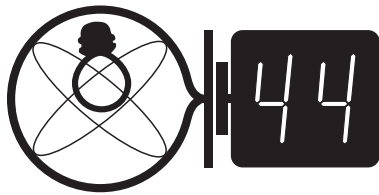
I teraz kluczowa obserwacja: zaczynając z dowolnego przedziału  $p$  i wykonując  $n$  razy przypisanie  $p := next[p]$ , zawsze wylądujemy w pewnym przedziale optymalnym. Dowód jest nieco techniczny i wymaga przyjrzenia się, jak wyglądałaby sytuacja, gdyby wszystkie przedziały  $p, next[p], next[next[p]], \dots$  były nieoptymalne; zostawiamy go jako ćwiczenie dla Czytelnika.

Ostatecznie algorytm ma złożoność czasową  $O(n \log n)$ , zdominowaną przez sortowanie przedziałów. Pozostałe fazy (wyznaczenie przedziałów dla prostokątów, wyznaczenie tablicy  $next$  i pewnego przedziału optymalnego, algorytm zachłanny) działają w czasie liniowym.

Tomasz IDZIASZEK

# Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2017



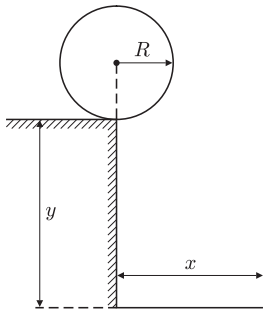
## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delta*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z fizyki nr 626, 627

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA



**626.** Na skraju prostokątnego uskoku o wysokości  $h$  (rysunek) leży jednorodna kula o promieniu  $R$ , przy czym  $h > \frac{R}{3}$ . W stanie początkowym kula znajduje się w stanie równowagi chwiejnej. Znaleźć odległość  $x$  miejsca upadku kuli na ziemię, zakładając, że jej ruch rozpoczął się z zerową prędkością początkową. Nie ma tarcia między kule a uskokiem.

**627.** W pionowo ustawionym cylindrze z tłokiem znajduje się jednoatomowy gaz doskonały. Odległość tłoka od dna cylindra wynosi  $l$ . Po obciążeniu tłoka ciężarkiem o masie  $m$  i ustaleniu się równowagi temperatura bezwzględna gazu wzrosła dwukrotnie. Cylinder i tłok wykonane są z izolatora cieplnego. Obliczyć przyrost energii wewnętrznej gazu. Pominąć tarcie między cylindrem a tłokiem.

### Zadania z matematyki nr 729, 730

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**729.** W trójkącie  $ABC$  bok  $AC$  jest dłuższy niż  $BC$ . Punkt  $P$  leży na dwusiecznej  $CK$  kąta  $C$ , zaś punkt  $Q$  leży na środkowej  $CM$ , połowiącej bok  $AB$ ; przy tym  $MP \parallel AC$  oraz  $KQ \parallel BC$ . Wykazać, że odcinek  $PQ$  jest prostopadły do  $CK$ .

**730.** Wyznaczyć kres dolny zbioru liczb postaci  $n\{n\sqrt{2}\}$ , gdy  $n = 1, 2, 3, \dots$  (tradycyjne oznaczenie:  $\{x\} = x - [x]$ ).

Zadanie 730 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.



**Rozwiązanie zadania M 1511.** Zauważmy, że  $n = 0$  spełnia warunki zadania i założmy teraz, że  $n \neq 0$ . Wówczas

$$n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 < n^4 + n^3 + \frac{9}{4}n^2 + n + 1 = \left(n^2 + \frac{1}{2}n + 1\right)^2$$

oraz

$$n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 > n^4 + n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(n^2 + \frac{1}{2}n\right)^2,$$

przy czym druga nierówność wynika z tego, że

$$\frac{3}{4}n^2 + n + 1 = \frac{3}{4}\left(n + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} > 0.$$

W takim razie pierwiastek z liczby  $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$  leży wewnątrz przedziału  $(n^2 + \frac{1}{2}n; n^2 + \frac{1}{2}n + 1)$  długości 1. Jeśli  $n$  jest liczbą parzystą, to końce przedziału są liczbami całkowitymi i  $n$  nie może spełniać warunków zadania. W przeciwnym razie wewnątrz przedziału leży dokładnie jedna liczba całkowita  $n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ . Pozostaje sprawdzić, dla jakich liczb  $n$  zachodzi równość

$$n^4 + n^3 + n^2 + n + 1 = \left(n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

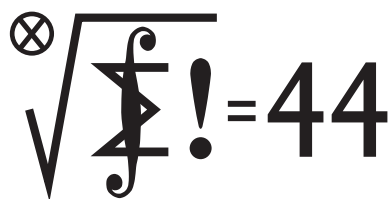
Równanie to upraszcza się do postaci

$$\frac{1}{4}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{3}{4},$$

co daje rozwiązania  $n = 3$  i  $n = -1$ . Łatwo sprawdzić, że obie te liczby spełniają warunki zadania.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 614 ( $WT = 1,77$ ), 615 ( $WT = 2,33$ ), 616 ( $WT = 2,88$ ), 617 ( $WT = 1$ ), 618 ( $WT = 1,78$ ) i 619 ( $WT = 2,2$ ) z numerów 3, 4, 5/2016

Michał Koźlik	Poznań	39,15
Tomasz Rudny	Gliwice	37,68
Marian Łupieżowicz	Gliwice	35,47
Jacek Konieczny	Poznań	29,51
Jan Zambrzycki	Białystok	28,76
Ryszard Woźniak	Kraków	26,62
Bogusław Mikielwicz	Brodnica	22,22



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 719 ( $WT = 2,50$ ) i 720 ( $WT = 1,50$ ) z numeru 4/2016

Janusz Olszewski	Warszawa	46,14
Janusz Fiet	Warszawa	44,74
Paweł Kubit	Kraków	43,02
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	42,77
Piotr Kumor	Olsztyn	38,15
Marek Galecki	USA	37,76
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	37,29
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,90
Witold Bednarek	Łódź	33,95

Obaj zdobywcy premii 44, obaj o imieniu Janusz – nie pierwszy raz w tej roli. Pan Fiet po raz drugi. Pan Olszewski po raz siedemnasty. Przy następnej liczbie Fermata poświęćmy chyba cały numer temu wydarzeniu.



## Prosto z nieba: Mikroksiężyc miniplanety

Zimne i odległe rubieże Układu Słonecznego – obszary rozciągające się poza orbitą Neptuna – stają się, wraz z powiększającą się o nich wiedzą, nieco mniej puste. Dzieje się tak za sprawą kampanii obserwacyjnych skupiających się na poszukiwaniu obiektów trans-Neptunowych, sąsiadów Plutona, największej planety karłowatej naszego układu w pasie Kuipera.

**Pas Kuipera jest podobny do pasa planetoid pomiędzy Marsem a Jowiszem, z tym że jest od niego 20 razy szerszy i 100 razy bardziej masywny. Obiekty pasa Kuipera znajdują się w odległościach od 30 do 50 j.a. od Słońca.**

Oprócz zdegradowanego Plutona od 2005 roku śledzone są w tym rejonie dwa inne, niewielkie obiekty: Haumea oraz Makemake. Według wytycznych Międzynarodowej Unii Astronomicznej nazwy planetek są imionami bóstw związanych z tworzeniem świata. Haumea jest boginią-matką hawajskiej mitologii, związaną z wulkanem Mauna Kea, natomiast Makemake to bóstwo płodności ludu Rapa Nui, czyli Wyspy Wielkanocnej (choć informatykom nazwa ta zapewne kojarzy się inaczej). Promień Haumei to zaledwie 650 km, a Makemake mierzy mniej więcej 720 km. Okres obiegu planetek wokół Słońca wynosi około 300 lat.

Obchodzący niedawno 25. urodziny teleskop kosmiczny Hubble'a został w 2015 roku wycelowany w kierunku

Makemake. Okazuje się, że Makemake ma towarzystwo! Niewielki księżyc S/2015 (136472) 1 MK2 (nazwa robocza), którego promień oszacowano na około 80 km, orbituje wokół planetki w odległości 20 tys. km w czasie około 12 dni. Możliwość istnienia tego mini-układu umacnia przekonanie planetologów o dużej różnorodności obiektów mogących znajdować się w pasie Kuipera. Makemake jest dość podobna do Plutona i tak jak w jego przypadku dalsze obserwacje ruchu księżycy pozwolą na obliczenie parametrów planety, na przykład gęstości. Kształt orbity księżycy MK2 da natomiast odpowiedź na pytanie o jego pochodzenie – ciasna orbita kołowa sugeruje, że powstał on podczas zderzenia Makemake z innym obiektem, natomiast wydłużona eliptyczna orbita może świadczyć o przechwyceniu MK2 przez Makemake. Równocześnie prowadzi się obserwacje w podczerwieni powierzchni obu obiektów, studiując zmiany jasności świadczące o detalach powierzchni. MK2 wydaje się mieć powierzchnię o wiele ciemniejszą od Makemake, co według badaczy świadczy o tym, że jego masa jest zbyt mała, by utrzymać na powierzchni grubą warstwę lodu szybko sublimującego pod wpływem światła słonecznego. Ta cecha czyni MK2 podobnym do innych małych obiektów Układu Słonecznego, takich jak komety, których powierzchnie również pokrywa dość ciemny materiał.

*Michał BEJGER*

## Niebo w listopadzie

W połowie miesiąca, a dokładniej 14 XI, będzie można zaobserwować wspomnianą w poprzednim odcinku „super-pełnię” Księżyca. Nasz naturalny satelita znajdzie się wtedy w odległości zaledwie 356 509 kilometrów od Ziemi i będzie to jego największe zbliżenie w okresie od 1990 do 2020 roku. Stworzy to zatem wyjątkową okazję do wykonania zdjęć i obserwacji struktur znajdujących się na Księżycu.

Korzystając z listopadowego wyjątkowego usytuowania Księżyca, warto zwrócić uwagę na ciała niebieskie, do których zbliży się nasz satelita w swojej wędrówce po nocnym niebie. Już kolejnej nocy (15 XI) po „super Księżycu”, najjaśniejsza gwiazda konstelacji Byka, Aldebaran, znajdzie się w odległości 0,4° na południe od Księżyca. Aldebaran to oddalona o około 67 lat świetlnych od Ziemi gwiazda podwójna, świecąca z jasnością 0,85<sup>m</sup>, widoczna zaraz po zmroku.

Przyglądając się tym rejonom nieba, warto też zwrócić uwagę na gromadę Hiady. Jest to bardzo jasna (około 0,5<sup>m</sup>) gromada otwarta zawierająca ponad 300 widocznych gołym okiem gwiazd. Znajduje się w gwiazdozbiornie Byka. Szukając jej warto pamiętać, że Hiady wraz z Aldebaranem tworzą na niebie charakterystyczny kształt podobny do litery „V”, a gromadę, ze względu na jej imponujące rozmiary, łatwiej obserwować lornetką lub lunetką niż przez teleskop.

W noc 19 XI w odległości ok 4,3° na północ od Księżyca, znaleźć będzie można gromadę otwartą Messier 44, nazywaną także M44, Żłóbek lub Pszczółka. Messier 44 znany był już starożytnym Grekom i Rzymianom. Gromady

można szukać w gwiazdozbiornie Raka, a dzięki jasności 3,7<sup>m</sup> możliwe są obserwacje nieuzbrojonym okiem kilku najjaśniejszych gwiazd. Za pomocą lornetki zauważyć można kilkanaście obiektów, natomiast niewielkim teleskopem nawet kilkadziesiąt – Galileusz podczas swoich pionierskich obserwacji zarejestrował około 40 obiektów.

W drugiej połowie nocy 21 XI w odległości około 1,3° na północ od Księżyca pojawi się układ podwójny gwiazd nazywany Regulusem. Jest to najjaśniejszy obiekt (jasność około 1,36<sup>m</sup>) z konstelacji Lwa. Regulus, a dokładniej jego dominujący składnik, tak jak nasze Słońce jest gwiazdą będącą na ciągu głównym, czyli na tym etapie ewolucji, w którym wyświecana przez niego energia powstaje z najbardziej popularnej (wśród gwiazd) przemiany chemicznej spalania wodoru w hel. Regulus jest kilkukrotnie większy niż nasze Słońce i świeci ponad 150 razy jaśniej niż ono.

25 XI tuż przed świtem w okolicach Księżyca (1,9° na północ) zauważymy Jowisza o jasności -1,76<sup>m</sup>. W jego towarzystwie wypatrzeć będzie można obiekty z gwiazdozbiornu Panny, w szczególności zlokalizowaną tuż pod Jowiszem Spikę, świecąca z jasnością 0,95<sup>m</sup>.

Listopad jest miesiącem, w którym warto rozpocząć lub kontynuować październikowe obserwacje planety karłowatej (4) Westa. Jasność odkrytego przez H.W. Olbersa w 1807 roku obiektu wyniesie w listopadzie około 7,5<sup>m</sup>, a szukać go należy w gwiazdozbiornie Raka.

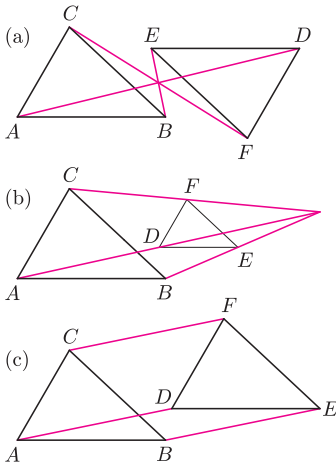
*Karolina BĄKOWSKA*

## Dwa trójkąty

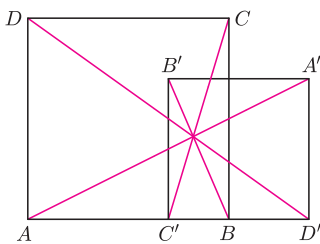
Joanna JASZUŃSKA

**Twierdzenie (\*).** Dane są trójkąty  $ABC$  i  $DEF$ , przy czym  $AB \parallel DE$ ,  $BC \parallel EF$ ,  $CA \parallel FD$ . Wówczas istnieje jednokładność lub przesunięcie przeprowadzające  $A$  na  $D$ ,  $B$  na  $E$  i  $C$  na  $F$  (rys. 1). Innymi słowy, proste  $AD, BE, CF$  przecinają się w jednym punkcie (środku jednokładności) lub są równoległe.

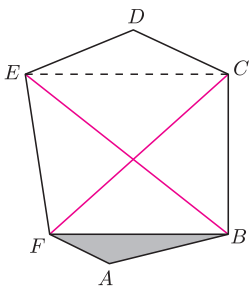
Dwa trójkąty spełniające założenia twierdzenia (\*) nazwiemy *zgodnie ułożonymi*, jeśli równoległe wektory  $\vec{AB}$  i  $\vec{DE}$  mają ten sam zwrot (rys. 1 (b) i (c)) oraz *niezgodnie ułożonymi* w przeciwnym przypadku (rys. 1 (a)). Dla trójkątów niezgodnie ułożonych przekształcenie opisane w twierdzeniu jest jednokładnością o skali ujemnej, czyli odcinki  $AD, BE, CF$  przecinają się w jednym punkcie.



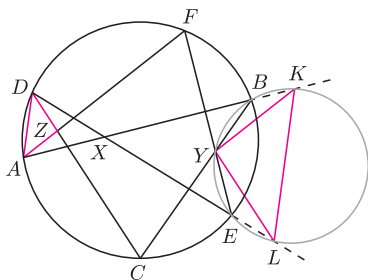
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3.



Rys. 4

Więcej o jednokładnościach w *deltooidach* 1–3/2010, w tym m.in. nieco inne rozwiązanie zadania 4. Tw. Pascala opisano dokładniej w *deltoidzie* 9/2014.

1. Punkty  $A, C', B, D'$  położone są na jednej prostej w tej właśnie kolejności. Kwadrat  $ABCD$  i  $A'B'C'D'$  leżą po tej samej stronie tej prostej (rys. 2). Wykaż, że odcinki  $AA', BB', CC', DD'$  przecinają się w jednym punkcie.

2. Dany jest sześciokąt wypukły  $ABCDEF$ . Każda z przekątnych  $AD, BE, CF$  dzieli ten sześciokąt na dwa czworokąty o równych polach. Udowodnij, że przekątne te przecinają się w jednym punkcie.

3. **Twierdzenie Pascala.** Punkty  $A, B, C, D, E, F$  leżą na jednym okręgu. Proste  $AB$  i  $DE$  przecinają się w punkcie  $X$ , proste  $BC$  i  $EF$  w punkcie  $Y$ , proste  $CD$  i  $FA$  w punkcie  $Z$ . Wykaż, że wówczas punkty  $X, Y, Z$  leżą na jednej prostej.

4. Okręgi  $O_1, O_2, O_3$  są styczne odpowiednio do par boków  $AB$  i  $AC$ ,  $AB$  i  $BC$  oraz  $AC$  i  $BC$  trójkąta  $ABC$ . Okrąg  $O$  jest styczny zewnętrznie do okręgów  $O_1, O_2, O_3$  odpowiednio w punktach  $D, E, F$ . Wykaż, że proste  $AD, BE, CF$  przecinają się w jednym punkcie.

5. Udowodnij twierdzenie (\*).

### Rozwiązania niektórych zadań

**R1.** Trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  są podobne (jako połówki kwadratów) oraz są położone w sposób opisany w twierdzeniu (\*). Ponadto są one niezgodnie ułożone, istnieje więc jednokładność o skali ujemnej przeprowadzająca  $A$  na  $A'$ ,  $B$  na  $B'$  oraz  $C$  na  $C'$ . Odcinki  $AA', BB', CC'$  przecinają się więc w jej środku. Analogicznie odcinek  $DD'$  przechodzi przez punkt przecięcia odcinków  $AA'$  i  $BB'$ .  $\square$

**R2.** Niech  $[F]$  oznacza pole figury  $F$ . Skoro  $[ABCF] = \frac{1}{2}[ABCDE] = [ABEF]$ , to  $[FBC] = [FBE]$  (rys. 3). Trójkąty te mają wspólną podstawę  $FB$ , zatem mają też równe wysokości na nią. Ponieważ punkty  $C$  i  $E$  leżą po tej samej stronie prostej  $FB$ , wynika stąd, że  $CE \parallel FB$ . Analogicznie  $AE \parallel DB$  oraz  $AC \parallel DF$ .

Wobec tego niezgodnie ułożone trójkąty  $ACE$  i  $DFB$  spełniają założenia twierdzenia (\*). Jeden z nich jest więc obrazem drugiego w pewnej jednokładności o ujemnej skali, której środek leży na każdym z odcinków  $AD, BE, CF$ .  $\square$

**R3.** Niech okrąg opisany na trójkącie  $BEY$  przecina proste  $AB, DE$  w drugich punktach odpowiednio  $K$  i  $L$ . Dowód przeprowadzimy w przypadku przedstawionym na rysunku 4, pozostałe można uzasadnić podobnie.

Rozważmy trójkąty  $ADZ$  i  $KLY$ . Z równości kątów wpisanych opartych na jednym łuku mamy  $\sphericalangle BAF = \sphericalangle BEF = \sphericalangle BEY = \sphericalangle BKY$ , więc  $AZ \parallel KY$ , ponieważ punkty  $Z$  i  $Y$  leżą po przeciwnych stronach prostej  $AK$ . Podobnie  $DZ \parallel LY$ . Ponadto czworokąt  $BKLE$  jest wpisany w okrąg, zatem  $\sphericalangle DAB = \sphericalangle DEB = \sphericalangle BKL$ , a stąd  $AD \parallel KL$ .

Wobec tego trójkąty  $ADZ$  i  $KLY$  spełniają założenia twierdzenia (\*). Stąd punkt  $X$  przecięcia prostych  $AB$  i  $DE$  należy też do prostej  $YZ$ .  $\square$

**Wskazówka 4.** Warto opisać na okręgu  $O$  trójkąt  $A'B'C'$  o bokach odpowiednio równoległych do boków trójkąta  $ABC$ , ale niezgodnie ułożony, a następnie dowieść, że pewna jednokładność o środku  $D$  przeprowadza punkt  $A$  na  $A'$ .