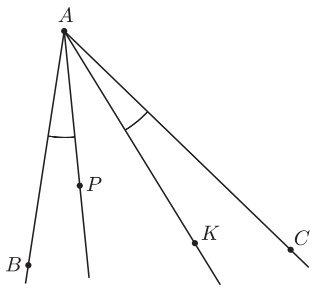
Izogonalne sprzężenie i symediany

Jerzy BEDNARCZUK[*]

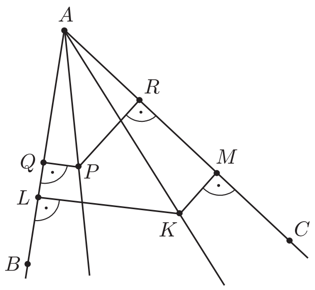
Izogonalne sprzężenie. Jeżeli w kącie wypukłym BAC leżą takie półproste AP i AK, że kąty BAP i CAK są równe, to będziemy mówić, że półproste AP i AK są *izogonalnie sprzężone w kącie BAC*. Jeśli półproste AP i AK są izogonalnie sprzężone w kącie BAC, to będziemy mówić, że punkty P i K są *izogonalnie sprzężone* w tym kącie (rys. 1). Na wiele sposobów można sprawdzić, czy dane półproste są izogonalnie sprzężone w pewnym kącie. Pomocne jest tu następujące twierdzenie.



Rys. 1

Twierdzenie 1. *Dany jest kąt wypukły BAC oraz półproste AP i AK leżące w tym kącie. Rzuty prostokątne punktu P na* **proste** *AB i AC to punkty Q i R, rzuty prostokątne punktu K na* **proste** *AB i AC to punkty L i M oraz $Q \neq L$ i $R \neq M$. Wówczas następujące warunki są równoważne*:

(1) $\sphericalangle QAP = \sphericalangle MAK$,
(2) $|PQ| \cdot |KL| = |PR| \cdot |KM|$,
(3) $\triangle QPR \sim \triangle MKL$ (*tzn. trójkąty QPR i MKL są podobne*),
(4) *punkty Q, L, M, R leżą na okręgu, którego środek to środek odcinka PK*,
(5) $QR \perp AK$,
(6) $QR \perp AK$ i $ML \perp AP$.



Rys. 2

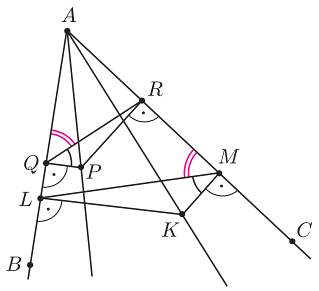
Uwaga. Dowód przeprowadzimy w takim przypadku, jak na rysunku 2. Możliwe są też inne przypadki: kąt BAC może być rozwarty i co najmniej jeden z punktów Q, R, L, M może leżeć poza ramionami kąta BAC lub punkty A, Q i L mogą leżeć w innej kolejności. We wszystkich tych przypadkach dowód przebiega analogicznie do zaprezentowanego.

Dowód. **(1)⇒(2).** Zauważmy, że następujące pary trójkątów są podobne: $\triangle PQA \sim \triangle KMA$ i $\triangle PRA \sim \triangle KLA$. Stąd wynika, że

$$\frac{|PQ|}{|KM|} = \frac{|PA|}{|KA|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|PA|}{|KA|} = \frac{|PR|}{|KL|},$$

a stąd, że

$$\frac{|PQ|}{|KM|} = \frac{|PR|}{|KL|}.$$



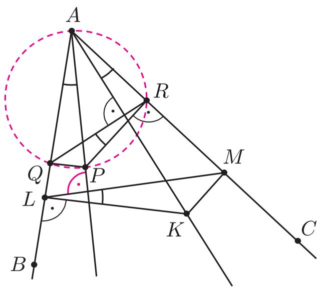
Rys. 3

(2)⇒(3). Z założenia wynika, że

$$\frac{|QP|}{|PR|} = \frac{|MK|}{|KL|}.$$

Jednocześnie $\sphericalangle QPR = \sphericalangle MKL$ (wystarczy porównać sumy kątów w czworokątach $AQPR$ i $AMKL$). Wobec tego $\triangle QPR = \triangle MKL$.

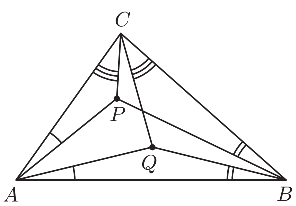
(3)⇒(4). Ponieważ trójkąty QPR i MKL są podobne, więc $\sphericalangle RQP = \sphericalangle LMK$. Stąd wynika, że $\sphericalangle RQA = \sphericalangle LMA$ (rys. 3). Wobec tego na czworokącie o wierzchołkach Q, L, M, R można opisać okrąg. Środek tego okręgu to środek odcinka PK, bo tam „trafiają" symetralne odcinków LQ i MR.



Rys. 4

(4)⇒(5). Kąty ALK i AMK są proste, więc punkty A, L, K, M leżą na okręgu. Stąd wynika, że $\sphericalangle KLM = \sphericalangle KAM$. Ponieważ czworokąt o wierzchołkach Q, L, M, R jest wpisany w okrąg, więc $\sphericalangle MLQ = \sphericalangle QRA$. Lewe strony tych dwóch równości dają w sumie $90°$, więc prawe także.

(5)⇒(6). Kąty AQP i ARP są proste, więc punkty A, Q, P, R leżą na okręgu (rys. 4). Stąd wynika, że $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QRP$. Ponieważ $QR \perp AK$ i $PR \perp AR$, więc $\sphericalangle QRP = \sphericalangle KAM$. Ponieważ punkty A, L, K, M leżą na okręgu, więc $\sphericalangle KAM = \sphericalangle KLM$. Mamy zatem $\sphericalangle QAP = \sphericalangle KLM$ i $KL \perp AL$. Stąd wynika, że $ML \perp AP$.



Rys. 5

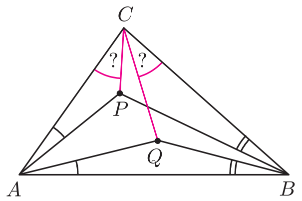
(6)⇒(1). Ponieważ punkty A, Q, P, R leżą na okręgu, więc $\sphericalangle QAP = \sphericalangle QRP$. Ponieważ $QR \perp AK$ i $PR \perp AR$, więc $\sphericalangle QRP = \sphericalangle MAK$. Z tych dwóch równości wynika teza. □

Jeśli dwa punkty należące do wnętrza trójkąta ABC są izogonalnie sprzężone w każdym kącie tego trójkąta, to będziemy mówić, że te punkty są *izogonalnie sprzężone w trójkącie ABC* (rys. 5). Czy w trójkącie zdarzają się punkty izogonalnie sprzężone? Precyzuje to następujące twierdzenie.

[*]Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Twierdzenie 2. *Jeśli punkt P należy do wnętrza trójkąta ABC, to istnieje dokładnie jeden punkt Q, izogonalnie sprzężony z punktem P w trójkącie ABC.*

Dowód. Niech punkt Q spełnia warunki podane na rysunku 6. Zauważmy, że punkt Q jest wyznaczony jednoznacznie. Musimy jeszcze udowodnić, że $\sphericalangle PCA = \sphericalangle QCB$. W tym celu powołamy się na twierdzenie 1, a dokładniej na równoważność warunków 1° z 2°. □



Rys. 6

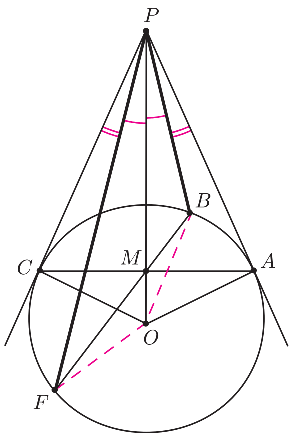
Przykłady punktów izogonalnie sprzężonych w trójkącie:
- środek okręgu wpisanego w trójkąt jest sprzężony z sobą,
- w trójkącie ostrokątnym ortocentrum jest sprzężone ze środkiem okręgu opisanego.

Dla zilustrowania możliwości zastosowania podawanych twierdzeń zamieścimy kilka zadań. Ich rozwiązania można znaleźć na końcu artykułu.

Zadanie 1. Wykazać, że w trójkącie ostrokątnym iloczyn odległości środka okręgu opisanego i ortocentrum od boku trójkąta nie zależy od wyboru boku.

Zadanie 2. Dany jest trapez $ABCD$ o podstawach BC i DA. Punkty P i Q są środkami odpowiednio przekątnych AC i BD. Wykazać, że jeśli $\sphericalangle BAQ = \sphericalangle DAP$, to $\sphericalangle ABQ = \sphericalangle CBP$.

Zadanie 3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|AC| = |BC|$. Punkty P i Q leżą wewnątrz tego trójkąta, przy czym $\sphericalangle PAC = \sphericalangle ABQ$ oraz $\sphericalangle PBC = \sphericalangle BAQ$. Wykazać że punkty C, P, Q są współliniowe.

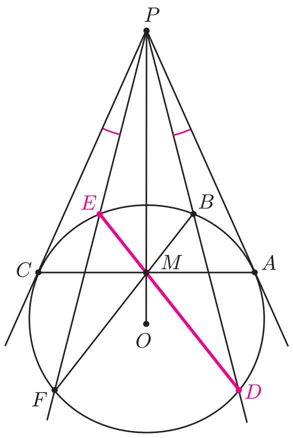


Rys. 7

Udowodnimy teraz bardzo przydatne twierdzenie.

Twierdzenie 3. *Punkt P leży na zewnątrz okręgu o środku O. Przez punkt P poprowadzono proste, styczne do tego okręgu w punktach A i C. Prosta przechodząca przez środek M odcinka AC przecina ten okrąg w punktach B i F (rys. 7). Wówczas półproste PB i PF są izogonalnie sprzężone w kącie APC, czyli $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPF$.*

Dowód. Ponieważ na każdym z czworokątów $BCFA$ i $PCOA$ można opisać okrąg, więc: $|MB| \cdot |MF| = |MA| \cdot |MC| = |MO| \cdot |MP|$ (korzystamy z własności *potęgi punktu względem okręgu*, o której można przeczytać, na przykład, w *deltoidzie* 2/2012). Z równości $|MB| \cdot |MF| = |MO| \cdot |MP|$ wynika, że punkty B, F, O, P leżą na jednym okręgu. Nazwijmy go o_1. Ponieważ $|OB| = |OF|$, więc kąty OPB i OPF są równe (jako kąty wpisane w okrąg o_1, oparte na przystających łukach). Stąd wynika, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPF$. □



Rys. 8

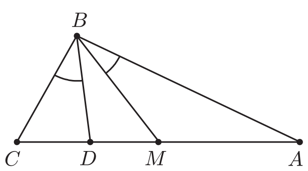
Z powyższego twierdzenia wynikają następujące wnioski.

Wniosek 1. *Punkt P leży na zewnątrz okręgu o środku O. Przez punkt P poprowadzono proste, styczne do tego okręgu w punktach A i C. Prosta przechodząca przez środek M odcinka AC przecina ten okrąg w punktach B i F. Proste PB i PF przecinają ten okrąg odpowiednio w punktach D i E (rys. 8). Wówczas:*

(a) *punkty E, M, D są współliniowe,*
(b) *czworokąt $BEFD$ jest trapezem równoramiennym.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że prosta OP jest osią symetrii całego rysunku.

Wniosek 2. *Punkt P leży na zewnątrz okręgu o środku O. Przez punkt P poprowadzono proste, styczne do tego okręgu w punktach A i C oraz dwie półproste izogonalnie sprzężone w kącie APC, przecinające ten okrąg w czterech punktach. Wówczas te punkty są wierzchołkami trapezu, którego przekątne przecinają się w środku M odcinka AC.*

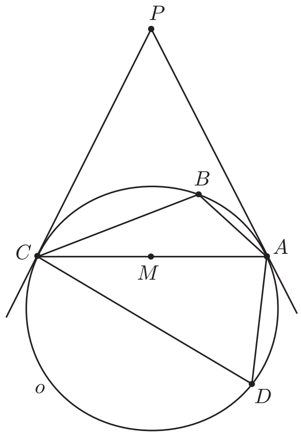


Rys. 9

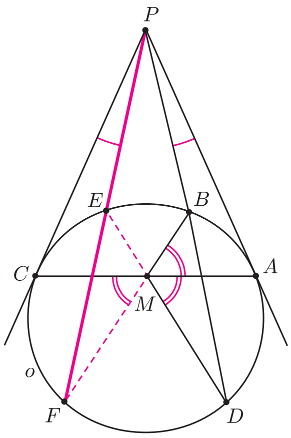
Symediany i punkt Lemoine'a.

Jeśli w trójkącie ABC punkt M jest środkiem boku AC, a punkt D należy do boku AC i półprosta BD jest izogonalnie sprzężona z półprostą BM, to półprostą BD będziemy nazywać *symedianą* w trójkącie ABC (rys. 9).

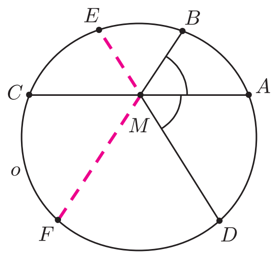
Trzy symediany w trójkącie przecinają się w jednym punkcie, bo jest to punkt izogonalnie sprzężony ze środkiem ciężkości trójkąta. Punkt przecięcia symedian trójkąta nazywany jest *punktem Lemoine'a* tego trójkąta.



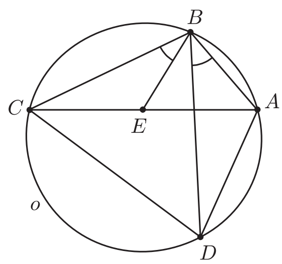
Rys. 10



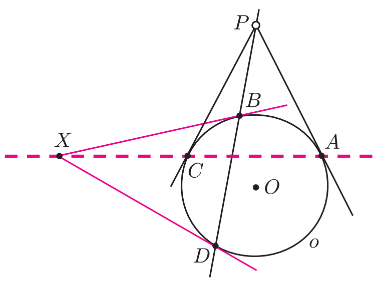
Rys. 11



Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14

Symediany mają wiele ciekawych własności. Kilka z nich podaje następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o, punkt M jest środkiem cięciwy AC, która nie jest średnicą okręgu o, proste styczne do okręgu o w punktach A i C przecinają się w punkcie P (rys. 10). Wówczas następujące warunki są równoważne:*

(1) *punkt P należy do prostej BD,*
(2) $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMD$,
(3) $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$,
(4) *półprosta BD jest symedianą w trójkącie ABC.*

Dowód. **(1)⇒(2).** Niech prosta PEF spełnia warunek $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPE$ (rys. 11). Na mocy wniosków z twierdzenia 3 czworokąt $BEFD$ jest trapezem równoramiennym i jego przekątne przecinają się w punkcie M. Stąd wynika, że $\sphericalangle AMB = \sphericalangle CMF = \sphericalangle AMD$.

(2)⇒(3). Przypuśćmy, że cięciwy ED i BF przecinają się w punkcie M (rys. 12). Wówczas symetralna odcinka AC jest osią symetrii całego rysunku, skąd wynika, że $|AF| = |CD|$ i $|CF| = |AD|$. Ponieważ punkt M jest środkiem odcinka AC, więc pola trójkątów BAF i BCF są równe. Jednocześnie $\sphericalangle BAF = 180^\circ - \sphericalangle BCF$, więc $|AB| \cdot |AF| = |BC| \cdot |CF|$. Z tej i z otrzymanych wyżej równości wynika teza.

(3)⇒(4). Niech punkt E spełnia warunki podane na rysunku 13, czyli $E \in \overline{AC}$ i $\sphericalangle EBC = \sphericalangle ABD$. Wówczas:

$$(*)\ \triangle DBA \sim \triangle CBE \quad \text{oraz} \quad (**)\ \triangle EBA \sim \triangle CBD.$$

Stąd

$$\frac{|EB|}{|EC|} \overset{(*)}{=} \frac{|AB|}{|AD|} \overset{\text{zał.}}{=} \frac{|CB|}{|CD|} \overset{(**)}{=} \frac{|EB|}{|EA|}.$$

Wobec tego $|EC| = |EA|$.

(4)⇒(1). Przeprowadzimy dowód nie wprost. Niech prosta PB przecina okrąg o w punkcie X. Z udowodnionej implikacji (1)⇒(4) wynika, że półprosta BX też jest symedianą w trójkącie ABC. Ale w trójkącie ABC z wierzchołka B można poprowadzić tylko jedną symedianę. Wobec tego punkty D i X pokrywają się. □

Z twierdzenia 4 wynikają dwa istotne wnioski.

Wniosek 3. *Ponieważ z warunku (3) wynika, że żaden z punktów A, B, C, D nie jest wyróżniony, więc jeśli półprosta BD jest symedianą w trójkącie ABC, to półprosta DB jest symedianą w trójkącie ADC, a prosta AC zawiera symediany trójkątów BAD i BCD.*

Wniosek 4. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o. Jeśli proste styczne do okręgu o w punktach A i C przecinają się na prostej BD, to styczne w punktach B i D przecinają się na prostej AC (rys. 14).*

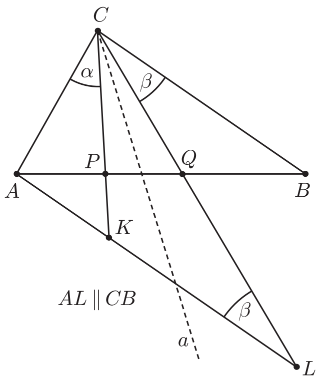
Teraz proponujemy cztery zadania:

Zadanie 4. Czy w trójkącie nierównoramiennym wysokość może być jednocześnie symedianą?

Zadanie 5. Punkt M jest środkiem podstawy AC trójkąta równoramiennego ABC. Okrąg wpisany w kąt ABC jest styczny do jego ramion w punktach A i C. Punkt D należy do krótszego łuku AC tego okręgu i $\sphericalangle DAB = 20^\circ$, $\sphericalangle DBA = 10^\circ$. Obliczyć miarę kąta MDC.

Zadanie 6. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, punkty M i N są środkami przekątnych odpowiednio BD i AC. Wykazać, że jeśli $\sphericalangle AND = \sphericalangle ANB$, to $\sphericalangle DMA = \sphericalangle DMC$.

Zadanie 7. Dany jest okrąg i punkty A i B należące do tego okręgu. Odcinek AB nie jest średnicą tego okręgu. Rozważmy takie trójkąty ABX, że punkt X należy do ustalonego łuku AB. Wykazać, że proste zawierające symediany wszystkich takich trójkątów, poprowadzone z wierzchołka X, przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 15

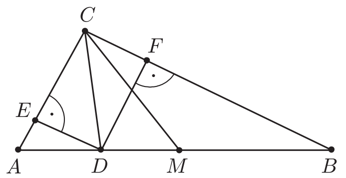
Długości odcinków. Przytoczymy teraz trzy twierdzenia, w których podane są własności punktów izogonalnie sprzężonych oraz symedian w zależności od związków między długościami odpowiednich odcinków.

Twierdzenie 5. *Dany jest trójkąt ABC. Punkty P i Q należą do odcinka AB (rys. 15). Wówczas proste CP i CQ są izogonalnie sprzężone w kącie ACB wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{|AP|}{|PB|}\cdot\frac{|AQ|}{|QB|}=\frac{|AC|^2}{|BC|^2}.$$

Dowód. Przez punkt A poprowadźmy prostą równoległą do prostej BC. Prosta ta przecina proste CP i CQ odpowiednio w punktach K i L. Oznaczmy kąty: $\sphericalangle ACK=\alpha$, $\sphericalangle BCL=\sphericalangle CLA=\beta$. Ponieważ $\triangle APK\sim\triangle BPC$, więc

$$\frac{|AP|}{|PB|}=\frac{|AK|}{|BC|}.$$



Rys. 16

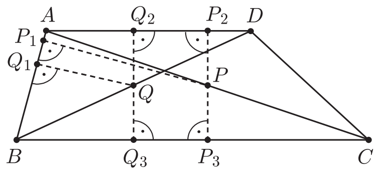
Podobnie $\triangle AQL\sim\triangle BQC$, więc

$$\frac{|AQ|}{|QB|}=\frac{|AL|}{|BC|}.$$

Wówczas:

$$\frac{|AP|}{|PB|}\cdot\frac{|AQ|}{|QB|}=\frac{|AC|^2}{|BC|^2}\ \Leftrightarrow\ \frac{|AK|}{|BC|}\cdot\frac{|AL|}{|BC|}=\frac{|AC|^2}{|BC|^2}\ \Leftrightarrow\ \frac{|AK|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|AL|}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \triangle KAC\sim\triangle CAL\ \Leftrightarrow\ \alpha=\beta.\ \square$$



Rys. 17

Twierdzenie 6. *Półprosta CD jest symedianą w trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|^2}{|BC|^2}.$$

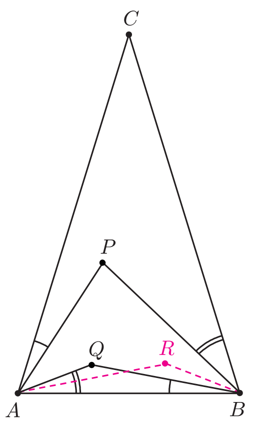
Dowód. Twierdzenie 6 jest prostym wnioskiem z twierdzenia 5.

Twierdzenie 7. *Niech punkt D należy do boku AB trójkąta ABC. Punkty E i F są rzutami prostokątnymi punktu D na proste CA i CB (rys. 16). Wówczas półprosta CD jest symedianą w trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{|DE|}{|DF|}=\frac{|AC|}{|BC|}.$$

Dowód. W dowodzie skorzystamy z twierdzenia 6. Zacznijmy od zapisania na dwa sposoby stosunku pól trójkątów ADC i BDC:

$$\frac{|AC|\cdot|DE|}{|BC|\cdot|DF|}=\frac{|AD|}{|BD|}.$$



Rys. 18

Otrzymujemy stąd równość:

$$\frac{|DE|}{|DF|}=\frac{|AD|}{|BD|}\cdot\frac{|BC|}{|AC|}.$$

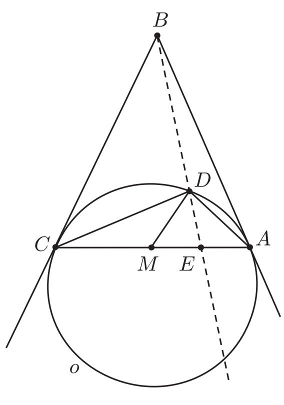
Zatem

$$\frac{|DE|}{|DF|}=\frac{|AC|}{|BC|}\ \Leftrightarrow\ \frac{|AD|}{|BD|}\cdot\frac{|BC|}{|AC|}=\frac{|AC|}{|BC|}\ \Leftrightarrow\ \frac{|AD|}{|BD|}=\frac{|AC|^2}{|BC|^2}.\ \square$$

Wniosek 5. *Symediana poprowadzona z wierzchołka C w trójkącie ABC jest zbiorem wszystkich takich punktów leżących wewnątrz kąta ACB, których stosunek odległości od prostych AC i BC jest równy $|AC|:|BC|$.*

Dla dowodu wystarczy powołać się na twierdzenie 7 oraz własności jednokładności (tej o środku w punkcie C).

Na koniec proponujemy jeszcze trzy zadania:

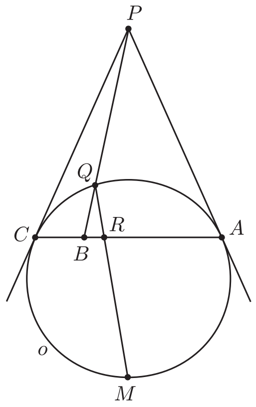


Rys. 19

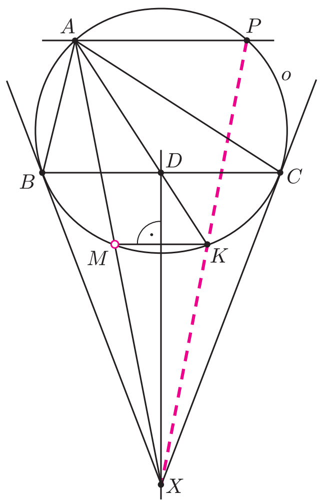
Zadanie 8. Punkt B należy do odcinka AC. Okrąg o przechodzi przez punkty A i C, proste styczne do okręgu o w punktach A i C przecinają się w punkcie P. Odcinek PB przecina okrąg o w punkcie Q, dwusieczna kąta AQC przecina odcinek AC w punkcie R. Wykazać, że przy ustalonych punktach A, B, C położenie punktu R nie zależy od wyboru okręgu o.

Zadanie 9. Nierównoramienny trójkąt ostrokątny ABC jest wpisany w okrąg o. Proste zawierające środkowe AD, BE, CF tego trójkąta przecinają okrąg o odpowiednio w punktach K, L, M. Prosta przechodząca przez A, równoległa do BC, przecina okrąg o w punkcie P. Analogicznie dla punktów B i C definiujemy punkty Q i R. Wykazać, że proste KP, LQ i MR przecinają się w jednym punkcie.

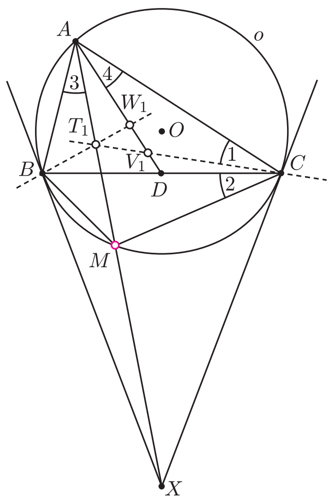
Zadanie 10. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Symetralne boków AB i AC przecinają środkową AD odpowiednio w punktach W i V. Proste BW i CV przecinają się w punkcie T. Wykazać, że punkt T należy do symediany trójkąta ABC, poprowadzonej z wierzchołka A.



Rys. 20



Rys. 21



Rys. 22

Rozwiązania zadań

Zadanie 1. Ponieważ w trójkącie ostrokątnym ortocentrum i środek okręgu opisanego są izogonalnie sprzężone, więc dla dowodu tej równości wystarczy powołać się na twierdzenie 1, a dokładniej na to, że z warunku 1° wynika warunek 2°.

Zadanie 2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 17. Skorzystamy z twierdzenia 1, z równoważności warunków 1° i 2°.

$$\sphericalangle BAQ = \sphericalangle DAP \iff |QQ_1| \cdot |PP_1| = |QQ_2| \cdot |PP_2| \iff$$
$$\iff |QQ_1| \cdot |PP_1| = |QQ_3| \cdot |PP_3| \iff \sphericalangle ABQ = \sphericalangle CBP.$$

Zadanie 3. Niech punkt R będzie obrazem symetrycznym punktu Q względem symetralnej odcinka AB (rys. 18). Ponieważ punkty P i R są izogonalnie sprzężone w kątach CAB i CBA, więc są także izogonalnie sprzężone w kącie ACB. Wynika stąd, że $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCR$. Jednocześnie $\sphericalangle ACQ = \sphericalangle BCR$. Z tych dwóch równości wynika, że $\sphericalangle ACP = \sphericalangle ACQ$, co kończy dowód.

Zadanie 4. Nietrudno zauważyć, że wysokość dowolnego trójkąta prostokątnego, poprowadzona z wierzchołka kąta prostego, jest także symedianą w tym trójkącie. Natomiast z twierdzenia 4, z równoważności warunków (1) i (4), wynika, że jeśli trójkąt nie jest prostokątny i wysokość pokrywa się z symedianą, to ten trójkąt musi być równoramienny.

Zadanie 5. Półprosta BD wyznacza symedianę DE trójkąta ADC (rys. 19). Ponieważ $\sphericalangle EDA = \sphericalangle DAB + \sphericalangle DBA = 20^\circ + 10^\circ = 30^\circ$, więc $\sphericalangle MDC = \sphericalangle EDA = 30^\circ$.

Zadanie 6. Dla dowodu wystarczy przypomnieć wniosek 3 z twierdzenia 4 i równoważność warunków (2) i (3) tego twierdzenia.

Zadanie 7. Dla dowodu wystarczy przypomnieć twierdzenie 4, a dokładniej równoważność warunków (1) i (4) tego twierdzenia.

Zadanie 8. Jeśli punkt M jest środkiem łuku AC, to półprosta QM jest dwusieczną kąta AQC (rys. 20). Wówczas:

$$\frac{|RA|}{|RC|} = \frac{|QA|}{|QC|} = \sqrt{\frac{|BA|}{|BC|}}.$$

Pierwsza równość wynika z twierdzenia o dwusiecznej, a druga stąd, że półprosta QB jest symedianą w trójkącie AQC. Wobec tego położenie punktu R zależy tylko od punktów A, B, C.

Zadanie 9. Opiszmy na okręgu o taki trójkąt XYZ, aby jego boki YZ, ZX, XY były styczne do okręgu o odpowiednio w punktach A, B, C. Niech M będzie punktem przecięcia odcinka AX z okręgiem o (rys. 21). Wówczas półprosta AM jest symedianą w trójkącie ABC. Stąd wynika, że $\sphericalangle BAM = \sphericalangle CAK$. Wobec tego łuki BM i CK są przystające i w rezultacie $BC \parallel MK$. Zatem prosta XD jest symetralną odcinka MK. A ponieważ jest również symetralną odcinka AP, więc punkty X, K, P są współliniowe. Stąd wynika, że półproste XA oraz XP są izogonalnie sprzężone w trójkącie XYZ. W rezultacie otrzymujemy, że proste KP, LQ i MR przecinają się w punkcie izogonalnie sprzężonym w trójkącie XYZ z punktem Lemoine'a trójkąta ABC (ten ostatni punkt jest także punktem Gergonne'a trójkąta XYZ).

Zadanie 10 (rozwiązanie Tomasza Cieśli)**.** Okrąg o jest opisany na trójkącie ABC. Niech styczne do okręgu o przecinają się w punkcie X, a odcinek AX przecina okrąg o w punkcie M. Punkt T_1 jest środkiem odcinka AM, proste BT_1 i CT_1 przecinają środkową AD odpowiednio w punktach W_1 i V_1 (rys. 22). Ponieważ prosta BC zawiera symediany trójkątów ABM i ACM, więc $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 = \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4$. Wobec tego $V_1 = V$. Analogicznie dowodzimy, że $W_1 = W$. Wobec tego $T_1 = T$.