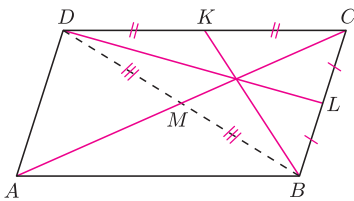
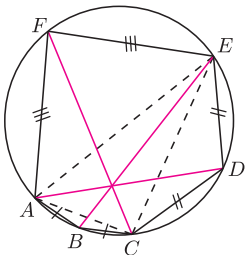


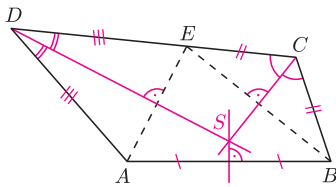
W wielu zadaniach należy uzasadnić, że pewne trzy proste przecinają się w jednym punkcie. Często można wykazać, że wszystkie one są symetralnymi, dwusiecznymi, wysokościami albo środkowymi pewnego trójkąta, co oczywiście kończy dowód.



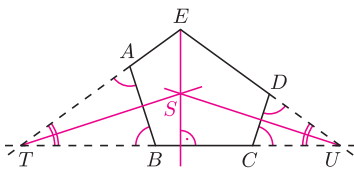
Rys. 1



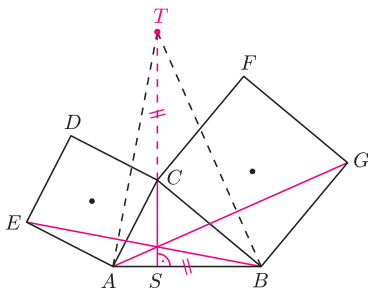
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Dwa rozwiązania zadania 6 przedstawiono w deltoidzie 11/2009. Zadania 3, 7 i 8 pochodzą odpowiednio z VIII, II i V Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów www.omg.edu.pl

1. Punkty K i L są środkami odpowiednio boków CD i BC równoległoboku $ABCD$. Udowodnij, że odcinki BK i DL przecinają się na przekątnej AC .

2. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wpisany w okrąg i $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykaż, że główne przekątne tego sześciokąta przecinają się w jednym punkcie.

3. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD + BC = CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S . Udowodnij, że $AS = BS$.

4. Wszystkie kąty wewnętrzne pięciokąta $ABCDE$ są równe. Symetralne odcinków AB i CD przecinają się w punkcie S . Wykaż, że proste ES i BC są prostopadłe.

5. Na bokach AC i BC trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ACDE$ i $BCFG$. Udowodnij, że proste AG , BE oraz wysokość CS trójkąta ABC przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania

R1. Niech M będzie punktem przecięcia przekątnych danego równoległoboku (rys. 1). Wówczas M jest środkiem odcinka BD i odcinki BK , DL , CM przecinają się w jednym punkcie jako środkowe trójkąta BCD . \square

R2. Z warunku $AB = BC$ wynika, że punkt B jest środkiem łuku AC danego okręgu i kąty wpisane AEB i CEB są równe (rys. 2). Prosta BE jest więc dwusieczną kąta AEC w trójkącie ACE ; analogicznie proste AD i CF są dwusiecznymi pozostałych kątów tego trójkąta. \square

R3. Niech E będzie takim punktem boku CD , że $ED = AD$, wtedy $EC = BC$ (rys. 3). Wówczas punkty A i E są symetryczne względem dwusiecznej kąta CDA , zatem prosta DS jest symetralną odcinka AE . Analogicznie prosta CS jest symetralną odcinka BE . Symetralne boków trójkąta ABE przecinają się w punkcie S , a stąd $AS = BS$. \square

R4. Niech T i U będą punktami przecięcia prostej BC odpowiednio z prostymi EA i ED (rys. 4). Wobec równości kątów, trójkąty ATB i CUD są równoramienne i podobne, a stąd $\sphericalangle ETU = \sphericalangle EUT$. Symetralna boku AB jest jednocześnie dwusieczną kąta przy wierzchołku T w trójkącie ATB , a więc także w trójkącie ETU . Podobnie symetralna odcinka CD jest dwusieczną kąta EUT , zatem S jest punktem przecięcia dwusiecznych trójkąta równoramiennego ETU . Dwusieczna ES jest więc prostopadła do podstawy TU . \square

R5. Obróćmy kwadrat $ACDE$ o 90° wokół środka tak, by punkt A przeszedł na punkt C , natomiast kwadrat $BCFG$ o 90° wokół swojego środka tak, by punkt B przeszedł na punkt C (rys. 5). Przy obydwu tych obrotach odcinek AB przechodzi na ten sam odcinek o końcu w punkcie C , prostopadły do AB i równy AB . Nazwijmy drugi jego koniec T , wówczas punkty T, C, S są współliniowe.

Przy pierwszym obrocie odcinek BE przechodzi na TA , stąd $BE \perp TA$. Przy drugim obrocie odcinek AG przechodzi na TB , zatem $AG \perp TB$. Wobec tego proste AG, BE, CS są wysokościami trójkąta ABT . \square

Zadania domowe

6. Wykaż, że w dwunastokącie foremym $A_1A_2 \dots A_{12}$ przekątne A_1A_6 , A_2A_9 i A_3A_{11} przecinają się w jednym punkcie.

7. Miara każdego kąta sześciokąta $ABCDEF$ jest równa 120° . Udowodnij, że symetralne odcinków AB , CD i EF przecinają się w jednym punkcie.

8. Punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC . Punkty D, E, F to punkty symetryczne do punktu P odpowiednio względem prostych BC, CA, AB . Wykaż, że jeśli trójkąt DEF jest równoboczny, to proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

9. Wykaż, że proste opisane w zadaniu 2 są też wysokościami trójkąta BDF .