

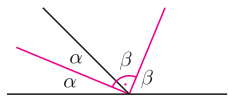


Dwusieczne

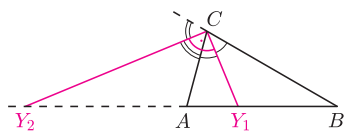
Joanna JASZUŃSKA

Dla kąta wklęsłego dwusieczna to zbiór punktów wewnątrz kąta równo odległych od przedłużeń jego ramion.

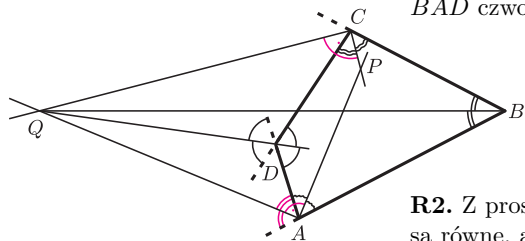
Pozostawiam Czytelnikom nietrudne uzasadnienie równoważności podanych dwóch definicji oraz dowód twierdzenia o dwusiecznej.



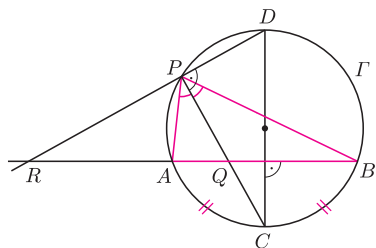
Rys. 1. $2(\alpha + \beta) = 180^\circ$.



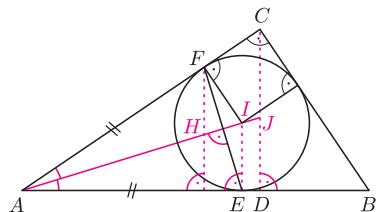
Rys. 2. Dwusieczna może być wewnętrzna lub zewnętrzna.



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5. $HF \parallel EI \parallel DC \perp AB$.

Zadanie 1 pochodzi z LXIV Olimpiady Matematycznej, a zadanie 3 z LXVI OM.

Skoro dwusieczna to półprosta dzieląca kąt na dwa równe kąty, to dlaczego dwusieczne kątów wewnętrznych każdego trójkąta przecinają się w jednym punkcie? Otóż dla kąta wypukłego dwusieczna to także zbiór punktów wewnątrz tego kąta równo odległych od obydwu jego ramion. Punkt przecięcia dwóch dwusiecznych trójkąta jest więc tak samo odległy od każdej z prostych zawierających jego boki, stąd leży też na trzeciej dwusiecznej i jest środkiem okręgu wpisanego.

Fakt. Dwusieczne kątów przyległych są prostopadłe (rys. 1).

1. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P leżącym wewnątrz czworokąta $ABCD$, a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q na zewnątrz czworokąta. Udowodnij, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

Twierdzenie o dwusiecznej. W trójkącie ABC punkt Y należący do prostej AB jest spodkiem dwusiecznej kąta przy wierzchołku C wtedy i tylko wtedy, gdy $CA/CB = YA/YB$ (rys. 2).

2. Odcinek CD jest średnicą okręgu Γ , a cięciwa AB jest prostopadła do tej średnicy. Punkt P należy do krótszego łuku AD okręgu Γ . Proste PC i PD przecinają prostą AB odpowiednio w punktach Q i R . Wykaż, że $QA/QB = RA/RB$.

3. Dany jest trójkąt ABC , w którym kąt przy wierzchołku C jest prosty. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C , a okrąg wpisany w dany trójkąt jest styczny do boków AB i AC odpowiednio w punktach E i F . Wykaż, że ortocentrum trójkąta AEF jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ACD .

Rozwiązania

R1. Jeśli kąt PAQ jest prosty, to AQ jest dwusieczną kąta przyległego do kąta BAD czworokąta (rys. 3). Z kolei aby dowieść, że kąt PCQ jest prosty, wystarczy wykazać, że CQ jest dwusieczną kąta przyległego do kąta BCD czworokąta.

Oznaczmy przez (Q, XY) odległość punktu Q od prostej XY . Zachodzą równości $(Q, CD) = (Q, DA) = (Q, AB) = (Q, BC)$ oraz $Q \notin CP$, co kończy dowód. \square

R2. Z prostokątowości cięciwy AB do średnicy CD wynika, że krótsze łuki CA i CB są równe, a więc półprosta PC jest dwusieczną kąta wpisanego APB (rys. 4). Kąt CPD jest wpisany w okrąg i oparty na średnicy, zatem $PC \perp PD$, czyli półprosta PR jest z kolei dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku P trójkąta APB . Z twierdzenia o dwusiecznej $QA/QB = PA/PB = RA/RB$. \square

R3. Oznaczmy przez H ortocentrum trójkąta AEF , przez I środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC , a przez J punkt przecięcia prostych AI i CD (rys. 5). Ponieważ $AE = AF$, więc półprosta AH jest dwusieczną kąta CAD i do zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że półprosta CH jest dwusieczną kąta ACD .

Kąt ACB jest prosty, więc punkty C, F, I i punkt styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC z bokiem BC tworzą kwadrat. Stąd $FC = FI = EI$.

Korzystając kolejno z twierdzenia Talesa dla $HF \parallel JC$, równości odcinków, twierdzenia Talesa dla $EI \parallel DJ$ i twierdzenia o dwusiecznej, uzyskujemy

$$\frac{HA}{HJ} = \frac{FA}{FC} = \frac{EA}{EI} = \frac{DA}{DJ} = \frac{CA}{CJ}.$$

Stąd na mocy twierdzenia o dwusiecznej CH jest dwusieczną kąta ACJ . \square

Zadania domowe

4. Udowodnij, że środek okręgu wpisanego w trójkąt jest ortocentrum trójkąta utworzonego przez środki okręgów dopisanych.

5. Wyznacz środek ciężkości obwodu trójkąta (czyli trójkątnej drucianej ramki).

6. W trójkącie ABC punkty D i E są spodkami dwusiecznych kątów wewnętrznych przy wierzchołkach A i B . Punkt F jest spodkiem dwusiecznej zewnętrznej kąta przy wierzchołku C . Wykaż, że punkty D, E, F są współliniowe.

Wskazówka: twierdzenie Menelaosa, opisane m.in. w *deltoidzie* 3/2011.