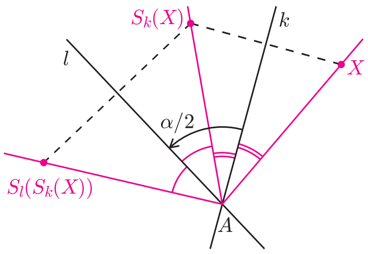
# O obrotach

*Joanna JASZUŃSKA*

Na płaszczyźnie obrót wokół punktu $A$ o kąt $0° \leqslant \alpha < 360°$ (ozn. $R_A^\alpha$) jest złożeniem dwóch symetrii osiowych (rys. 1). Utożsamiamy obroty o $\alpha + 360°$ i o $\alpha$.



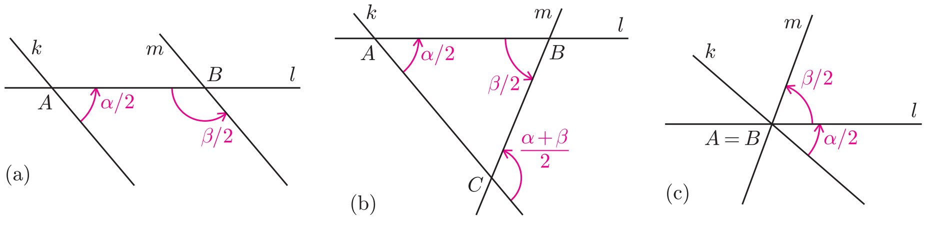

Rys. 1. $R_A^\alpha = S_l \circ S_k$, gdzie $\circ$ oznacza złożenie (najpierw stosujemy przekształcenie z prawej strony), a $S_x$ to symetria względem prostej $x$.

Składanie przekształceń jest **łączne**: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Kąty mierzymy antyzegarowo. We wszystkich rozwiązaniach przyjmujemy taką orientację figur, jaką przedstawiono na rysunkach.

Więcej o składaniu symetrii osiowych przeczytać można w *Delcie* 11/2015.

**Fakt (∗).** *Dane są kąty* $0° \leqslant \alpha, \beta < 360°$. *Złożenie* $R_B^\beta \circ R_A^\alpha$ *jest:*
a) *przesunięciem (być może o wektor zerowy), jeśli* $\alpha + \beta = 0°$ *lub* $\alpha + \beta = 360°$,
b) *obrotem o kąt* $\alpha + \beta$ *w przeciwnym przypadku.*




Rys. 2. Jeśli $k \parallel m$, to $S_m \circ S_k$ jest przesunięciem, a jeśli $k = m$ – identycznością (ozn. Id).

*Dowód.* W każdym przypadku wybieramy osie symetrii $k, l, m$ jak przedstawiono na rysunku 2 i uzyskujemy $R_B^\beta \circ R_A^\alpha = S_m \circ S_l \circ S_l \circ S_k = S_m \circ S_k$, co w zależności od wzajemnego położenia prostych $k$ i $m$ daje odpowiednie przekształcenia. □

**1.** Na bokach czworokąta wypukłego $ABCD$ zbudowano trójkąty równoboczne $ABK$, $CDL$, $BCP$ i $DAQ$, pierwsze dwa z nich na zewnątrz czworokąta, pozostałe dwa – do wewnątrz. Wykaż, że $KQ = PL$ oraz $KQ \parallel PL$.

**2.** Na bokach trójkąta $ABC$ zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne $ABF$, $BCD$, $CAE$. Skonstruuj trójkąt $ABC$, mając dane tylko punkty $D, E, F$.

**Fakt (∗∗).** *Kąty* $0° < \alpha, \beta, \gamma < 360°$ *dają w sumie* $360°$. *Jeśli różne punkty* $A, B, C$ *spełniają warunek* $R_C^\gamma \circ R_B^\beta \circ R_A^\alpha = \mathrm{Id}$, *to tworzą trójkąt o kątach odpowiednio* $\alpha/2, \beta/2, \gamma/2$.

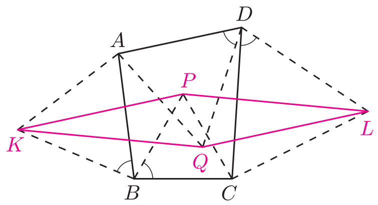
*Dowód* można odczytać z rysunku 2(b). □

**3.** Udowodnij twierdzenie Napoleona: *Na bokach trójkąta zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne. Wówczas ich środki tworzą trójkąt równoboczny.*

**4.** Dany jest punkt $P_0$ i trójkąt $ABC$. Niech $P_1 = R_A^{120°}(P_0)$, $P_2 = R_B^{120°}(P_1)$, $P_3 = R_C^{120°}(P_2)$, $P_4 = R_A^{120°}(P_3)$ itd. Udowodnij, że jeżeli $P_{300} = P_0$, to trójkąt $ABC$ jest równoboczny.

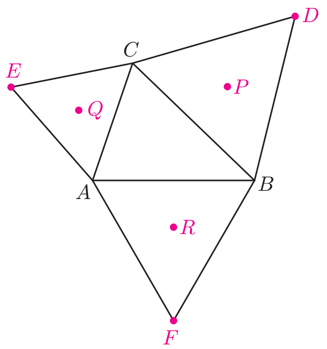
**5.** Kwadraty $ABCD$ i $AEFG$ o środkach odpowiednio $P$ i $Q$ są tak samo zorientowane i mają rozłączne wnętrza. Punkty $R$ i $S$ są środkami odpowiednio odcinków $BG$ i $DE$. Wykaż, że czworokąt $PRQS$ jest kwadratem.

## Rozwiązania




Rys. 3. $KQLP$ jest równoległobokiem (być może zdegenerowanym).

**R1.** Niech $f = R_D^{60°} \circ R_B^{300°}$ (rys. 3). Na mocy (∗) jest to przesunięcie, ponadto $f(K) = R_D^{60°}(R_B^{300°}(K)) = R_D^{60°}(A) = Q$ i analogicznie $f(P) = L$. Oznacza to, że $\overrightarrow{KQ} = \overrightarrow{PL}$ (jest to wektor przesunięcia $f$), co kończy dowód. □




Rys. 4

**R2.** Niech $f = R_F^{60°} \circ R_D^{60°} \circ R_E^{60°}$ (rys. 4). Na mocy (∗) jest to obrót o $180°$. Skoro

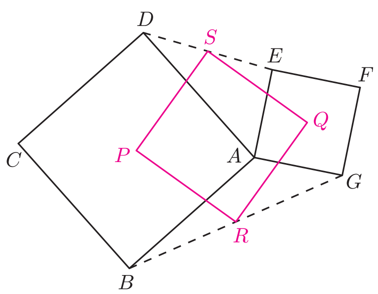
$$f(A) = R_F^{60°}(R_D^{60°}(R_E^{60°}(A))) = R_F^{60°}(R_D^{60°}(C)) = R_F^{60°}(B) = A,$$

to $A$ jest punktem stałym (środkiem) tego obrotu, czyli $f = R_A^{180°}$.

Rozważmy dowolny punkt $X$ i wyznaczmy $f(X)$. Wówczas otrzymujemy kolejno: $A$ jako środek odcinka o końcach $X$ i $f(X)$, $C = R_E^{60°}(A)$, $B = R_D^{60°}(C)$. □

**R3.** Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 4 i niech $f = R_P^{120°} \circ R_Q^{120°} \circ R_R^{120°}$. Na mocy (∗) jest to przesunięcie. Ponieważ $f(B) = B$, to wektor przesunięcia jest zerowy, czyli $f = \mathrm{Id}$. Zatem na mocy (∗∗) trójkąt $PQR$ jest równoboczny. □

**R4.** Niech $f = R_C^{120°} \circ R_B^{120°} \circ R_A^{120°}$. Na mocy (∗) jest to przesunięcie. Z treści zadania wynika, że $f^{100}(P_0) = P_{300} = P_0$, stąd wektor przesunięcia jest zerowy, czyli $f = \mathrm{Id}$. Wobec tego na mocy (∗∗) trójkąt $ABC$ ma kąty równe $60°$. □




Rys. 5

**R5.** Niech $f = R_R^{180°} \circ R_Q^{90°} \circ R_P^{90°}$ (rys. 5). Na mocy (∗) jest to przesunięcie; $f(B) = B$, więc $f = \mathrm{Id}$. Na mocy (∗∗) trójkąt $PQR$ jest prostokątny i $PR = QR$. Tak samo dowodzimy, że trójkąt $PQS$ jest drugą połową kwadratu $PRQS$. □