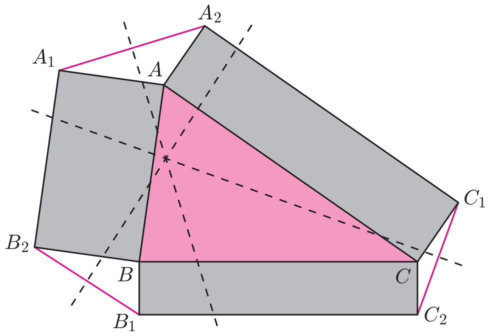
Prostokąty na trójkącie

Tomasz PRZYBYŁOWSKI uczeń liceum Zespołu Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu

Z twierdzeniem Pitagorasa wszyscy się znamy, budowanie kwadratów na bokach trójkąta prostokątnego nie jest niczym nadzwyczajnym. A co możemy powiedzieć ciekawego o prostokątach skonstruowanych na bokach dowolnego trójkąta?

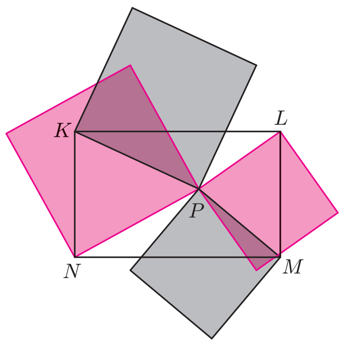
Okazuje się, że zachodzi następujący fakt:

Na bokach trójkąta ABC zbudowano na zewnątrz prostokąty ABB_2A_1, BCC_2B_1 i CAA_2C_1. Wówczas symetralne odcinków A_1A_2, B_1B_2 i C_1C_2 przecinają się w jednym punkcie.



Czytelnikowi Odważnemu polecamy powalczyć choć chwilę z dowodem powyższego faktu, zaś Czytelnikowi Rozsądnemu radzimy zapoznać się z poniższym lematem (znanym też jako twierdzenie o brytyjskiej fladze) i wtedy spróbować zaatakować nasz fakt, już z większym powodzeniem.

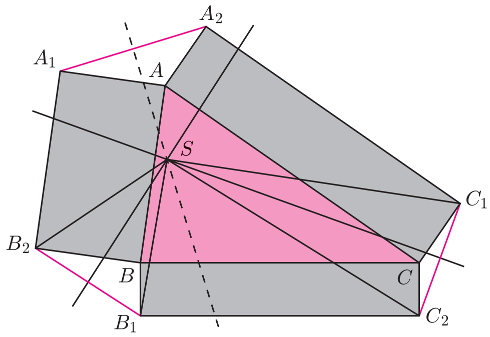
Dany jest prostokąt $KLMN$ i dowolny punkt P. Wówczas $PK^2 + PM^2 = PL^2 + PN^2$.



Warto odnotować, że jego teza to nic innego jak… budowanie kwadratów na odcinkach! Czytelnik Kreatywny dostrzeże z pewnością małą zbieżność tego faktu z prawdziwą nazwą lematu. Nietrudny dowód pozostawiamy jako ćwiczenie.

Z lematem możemy spokojnie przystąpić do dowodu współpękowości:

Dowód. Oznaczmy przecięcie symetralnych B_1B_2 i C_1C_2 jako S. Wówczas $SB_1 = SB_2$ i $SC_1 = SC_2$. Ponadto, korzystając trzy razy z lematu dla punktu S i prostokątów ABB_2A_1, BCC_2B_1 i CAA_2C_1,



otrzymujemy kolejno, iż:

$$SA^2 + SB_2^2 = SB^2 + SA_1^2,$$
$$SB^2 + SC_2^2 = SC^2 + SB_1^2,$$
$$SC^2 + SA_2^2 = SA^2 + SC_1^2.$$

Powyższe równania dodane stronami prowadzą do równości:

$$SA_2^2 + SB_2^2 + SC_2^2 = SA_1^2 + SB_1^2 + SC_1^2,$$

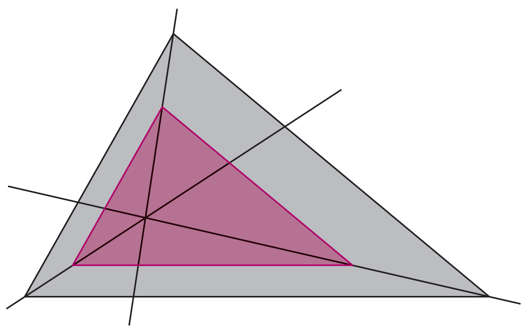
z której na mocy $SB_1 = SB_2$ i $SC_1 = SC_2$ otrzymujemy dalej:

$$SA_1^2 + SB_1^2 + SC_2^2 = SA_1^2 + SB_1^2 + SC_1^2 \Leftrightarrow SC_2^2 = SC_1^2 \Leftrightarrow SC_1 = SC_2.$$

Ostatnia równość dowodzi, że S leży na symetralnej odcinka C_1C_2, co kończy dowód. □

Zaprezentujemy jeszcze jeden dowód współpękowości symetralnych, obchodzący się bez najważniejszego narzędzia poprzedniego rozumowania, czyli twierdzenia o brytyjskiej fladze. Będziemy zmuszeni użyć innych ciężkich armat geometrii płaskiej, ale piękno poniższego rozumowania niewątpliwie rekompensuje to.

Zacznijmy od lematu z trójkątami podobnymi:



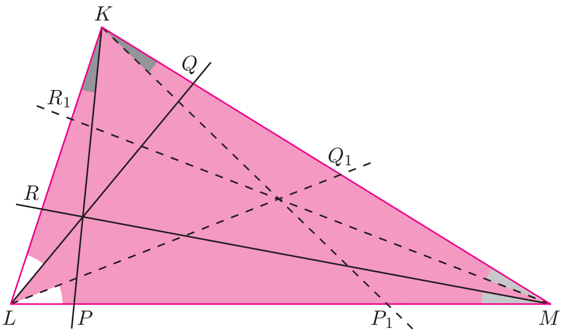
Dane są dwa nieprzystające trójkąty na płaszczyźnie tak, że ich odpowiadające boki są równoległe. Wówczas proste łączące wierzchołki tych trójkątów leżące naprzeciw równoległych boków są współpękowe.

Dowód można przeprowadzić, idąc kilkoma drogami: zwykłym podobieństwem, jednokładnością albo też bardziej wyrafinowanie, twierdzeniem Desarguesa. Szczegóły pozostawiamy Czytelnikowi.

Będziemy potrzebowali jeszcze jednego lematu, znanego jako lemat o izogonalnym sprzężeniu.

W trójkącie KLM na bokach KL, LM i MK dane są odpowiednio punkty R, P i Q, tak że proste KP, LQ i MR przecinają się w jednym punkcie. Wówczas proste będące odbiciami prostych KP, LQ i MR odpowiednio względem dwusiecznych kątów LKP, MLK i KML również przecinają się w jednym punkcie.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia, jak na rysunku poniżej.



Z założeń wynikają bezpośrednio równości kątów zaznaczone na nim. Korzystając z trygonometrycznego twierdzenia Cevy dla trójkąta KLM i prostych KP, LQ i MR, otrzymujemy, iż

$$(1)\qquad \frac{\sin(\sphericalangle MKP)}{\sin(\sphericalangle PKL)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle KLQ)}{\sin(\sphericalangle QLM)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle LMR)}{\sin(\sphericalangle RMK)} = 1,$$

co dzięki równości kątów z rysunku można przepisać jako:

$$(2)\qquad \frac{\sin(\sphericalangle LKP_1)}{\sin(\sphericalangle P_1KM)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle MLQ_1)}{\sin(\sphericalangle Q_1LK)} \cdot \frac{\sin(\sphericalangle KMR_1)}{\sin(\sphericalangle R_1ML)} = 1.$$

Stąd wynika, że odwrotność iloczynu po lewej stronie też wynosi 1. Korzystając znowu z trygonometrycznego twierdzenia Cevy, stwierdzamy, że proste KP_1, LQ_1 i MR_1 są współpękowe, co kończy dowód lematu. □

Przystępujemy do rozwiązania problemu.

Dowód. Niech punkty K, L, M będą wierzchołkami trójkąta utworzonego przez proste A_1B_2, B_1C_2, C_1A_2. Ponadto niech X, Y, Z będą środkami odcinków odpowiednio AK, BL, CM. Niech jeszcze P będzie środkiem odcinka A_1A_2, zaś Q niech będzie środkiem odcinka AA_2.

Na czworokącie AA_1KA_2 można opisać okrąg, gdyż dwa jego przeciwległe kąty są proste. Stąd wynika również, że AK jest średnicą tego okręgu, zatem punkt X jako środek AK jest środkiem okręgu. Leży on na symetralnej każdej z cięciw wcześniej wspomnianego okręgu, zatem w szczególności przechodzi przez niego symetralna odcinka A_1A_2. Analogicznie, symetralne odcinków B_1B_2 i C_1C_2 przechodzą odpowiednio przez punkty Y i Z.

Boki trójkąta XYZ są liniami środkowymi trapezów $ABLK$, $BCML$, $CMKA$, przeto boki trójkąta XYZ są równoległe do odpowiednich boków trójkąta ABC. Stąd, na mocy lematu o trójkątach podobnych, widzimy, że proste AX, BY, CZ przecinają się w jednym punkcie.

Zauważmy jeszcze, że na czworokącie $XPQA_2$ można opisać okrąg. Istotnie, kąty XPA_2 i XQA_2 są proste.

Co więcej, prosta XP jest odbiciem prostej XA względem dwusiecznej kąta YXZ. W istocie:

$$\sphericalangle PXQ = \sphericalangle PA_2Q = \sphericalangle A_1A_2A = \sphericalangle A_1KA = \sphericalangle YXA.$$

Analogicznie uzyskujemy tę zależność dla dwóch pozostałych symetralnych. Oczekiwana współpękowość wynika teraz bezpośrednio z lematu o izogonalnym sprzężeniu zastosowanego do trójkąta XYZ i prostych XA, YB i ZC, które, jak już pokazaliśmy, są współpękowe. □

Pierwszy dowód ma jednak tę przewagę, że pokazuje również, jak udowodnić podobną nietrywialną współpękowość symetralnych. A o jakich symetralnych tu mowa, to praca dla Czytelnika Dociekliwego.