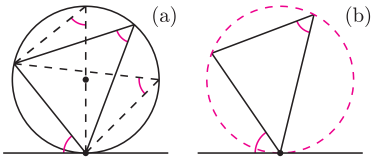
deltoid 81

Styczna i cięciwa

Joanna JASZUŃSKA

Twierdzenie o stycznej i cięciwie $(*)$ jest niezwykle prostym, a zarazem ogromnie przydatnym faktem z elementarnej geometrii. Głosi ono, że *kąt między styczną do okręgu a jego cięciwą przechodzącą przez punkt styczności równy jest kątowi wpisanemu w ten okrąg, opartemu na odpowiednim łuku* – rysunek 1(a). Dla dowodu wystarczy rozważyć ten spośród kątów wpisanych, którego ramię jest prostopadłe do stycznej.



Rys. 1(a) i (b). Twierdzenie o stycznej i cięciwie oraz twierdzenie odwrotne do niego.

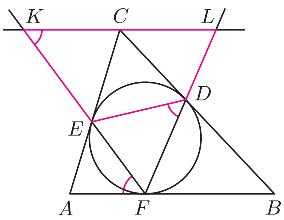
Zachodzi również twierdzenie odwrotne do $(*)$: jeśli odpowiednie kąty są równe (rys. 1(b)), to okrąg opisany na trójkącie jest styczny do danej prostej.

1. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Prosta równoległa do AB, przechodząca przez punkt C, przecina proste FE i FD odpowiednio w punktach K i L. Udowodnij, że na czworokącie $KEDL$ można opisać okrąg.

2. Czworokąt T jest wpisany w okrąg Γ_1 oraz opisany na okręgu Γ_2, przy czym K, L, M, N są kolejnymi punktami styczności T z Γ_2. Wykaż, że $KM \perp LN$.

3. Dany jest kwadrat $ABCD$ i taki punkt P w jego wnętrzu, dla którego $\sphericalangle CAP = \sphericalangle DCP = 19°$. Wyznacz $\sphericalangle ABP$.

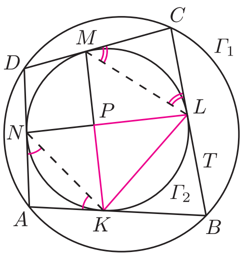
4. Okrąg Γ, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F. Wykaż, że środki P, Q, R okręgów wpisanych w trójkąty AEF, BFD, CDE leżą na okręgu Γ.



Rys. 2

Rozwiązania

R1. Korzystając kolejno z równoległości prostych AB i KL oraz z twierdzenia $(*)$, uzyskujemy $\sphericalangle EKL = \sphericalangle EFA = \sphericalangle EDF$ (rys. 2). Stąd $\sphericalangle EKL + \sphericalangle EDL = \sphericalangle EKL + 180° - \sphericalangle EDF = 180°$, co kończy dowód. $\square$

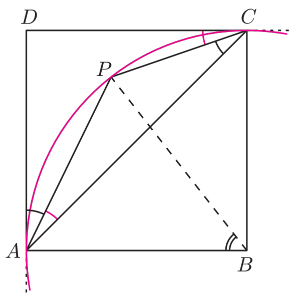


Rys. 3. $\alpha = \sphericalangle AKN = \sphericalangle ANK$, $\gamma = \sphericalangle CLM = \sphericalangle CML$.

R2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku 3. Skoro czworokąt T jest wpisany w okrąg, to $180° = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180° - 2\alpha + 180° - 2\gamma$, więc $\alpha + \gamma = 90°$.

Jednocześnie, na mocy twierdzenia $(*)$ dla okręgu Γ_2, mamy $\sphericalangle KLN = \alpha$ oraz $\sphericalangle LKM = \gamma$. Wobec tego $\sphericalangle KPL = 180° - \alpha - \gamma = 90°$, co kończy dowód. $\square$

R3. Na mocy danej równości kątów oraz twierdzenia odwrotnego do $(*)$, prosta CD jest styczna do okręgu opisanego na trójkącie PAC (rys. 4). Wobec tego środek tego okręgu leży na prostej BC (bo $BC \perp CD$). Analogicznie prosta AD także jest styczna do tego okręgu, gdyż $\sphericalangle DAP = \sphericalangle ACP = 26°$, zatem środek rozważanego okręgu leży też na prostej AB. Stąd jest nim punkt B.



Rys. 4

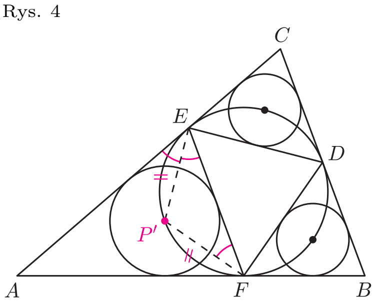
Kąt ABP jest więc kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany ACP, zatem $\sphericalangle ABP = 2 \cdot 26° = 52°$. $\square$

R4. Oznaczmy środek krótszego łuku EF okręgu Γ przez P' (rys. 5). Wówczas $\sphericalangle P'EF = \sphericalangle P'FE = \sphericalangle P'EA$, przy czym druga równość wynika z twierdzenia $(*)$. Wobec tego P' leży na dwusiecznej kąta AEF. Analogicznie dla kąta AFE, więc $P' = P$. Dowód dla punktów Q i R przebiega podobnie. $\square$

Zadania domowe

5. Udowodnij twierdzenie o stycznej i cięciwie oraz twierdzenie odwrotne.

6. Dwa okręgi przecinają się w punktach A i B. Proste styczne do tych okręgów w punkcie A przecinają je w drugich punktach C i D. Wykaż, że $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$.



Rys. 5

7. Z punktu P poprowadzono prostą przecinającą dany okrąg Γ w punktach A i B oraz prostą styczną do Γ w punkcie C. Wykaż, że $PA \cdot PB = PC^2$.

8. Okrąg Γ jest styczny do prostej k w punkcie D, cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do k, punkt C należy do prostej k. Proste AC i BC przecinają okrąg Γ w drugich punktach E i F. Wykaż, że prosta EF przechodzi przez środek odcinka CD.

9. W sytuacji z zadania 4 wykaż, że proste DP, EQ, FR przecinają się w jednym punkcie J oraz że punkty F i J są symetryczne względem prostej PQ.