



Połowa równoległoboku

Joanna JASZUŃSKA

Prostokątne kartki \mathcal{K} i \mathcal{L} , niekoniecznie o tych samych wymiarach, położono jak na rysunku 1. Czy kartka \mathcal{L} przykrywa ponad połowę kartki \mathcal{K} ?

W rozwiązaniu tej zagadki pomocna jest następująca obserwacja.

Twierdzenie (*). Jeśli punkt E należy do boku CD równoległoboku $ABCD$, to $[ABE] = \frac{1}{2}[ABCD]$.

Dowód. Prosta przez punkt E , równoległa do odcinka AD , dzieli $ABCD$ na dwa równoległoboki (rys. 2). Trójkąt ABE utworzony jest z ich połówek. \square

W zagadce o kartkach wystarczy teraz połączyć punkty B i C . Kartka \mathcal{L} przykrywa cały trójkąt ABC i jeszcze kawałek kartki \mathcal{K} – łącznie ponad połowę. \square

1. Punkty E, F i G należą odpowiednio do boków CD, BC i DA równoległoboku $ABCD$, przy czym $BF = DG$ (rys. 3). Odcinek FG przecina odcinki AE i BE odpowiednio w punktach H i I . Wykaż, że $[AHG] + [BFI] = [EHI]$.

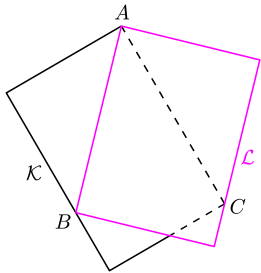
2. Punkt E należy do boku CD równoległoboku $ABCD$, punkt F – do boku BC . Odcinek DF przecina odcinki AE i BE odpowiednio w punktach G i H . Odcinki BE i AF przecinają się w punkcie I (rys. 4). Wykaż, że $[BFI] + [CEHF] + [DGE] = [AIHG]$.

Twierdzenie ().** Jeśli punkt E leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, to $[ABE] + [CDE] = [BCE] + [DAE]$.

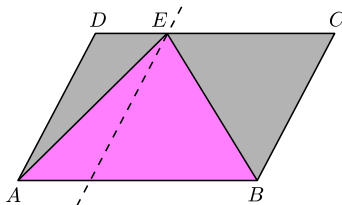
Dowód. Dzielimy $ABCD$ na dwa równoległoboki prostą przechodzącą przez punkt E , równoległą do boku AB , i dla każdego z nich korzystamy z twierdzenia (*). \square

3. Wykaż, że pole dowolnego czworokąta wypukłego równe jest połowie pola równoległoboku wyznaczonego przez jego przekątne.

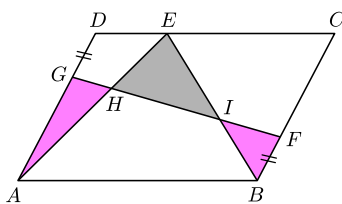
$[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury \mathcal{F} .



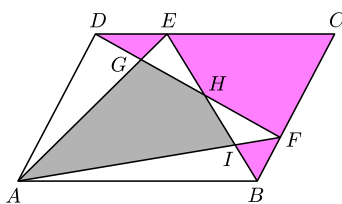
Rys. 1



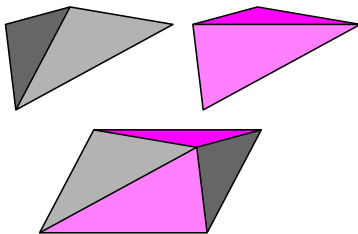
Rys. 2. Kolorowe = szare.



Rys. 3. Kolorowe = szare.



Rys. 4. Kolorowe = szare.



Rys. 5. Kolorowe = szare.

Zadanie 4 pochodzi z IV Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, a rysunek 5 z książki *When Less is More*, C. Alsina i R. Nelsen, MAA 2009.

Rozwiązania

R1. Odcinek FG dzieli równoległobok $ABCD$ na dwie figury przystające. Wobec tego i na mocy twierdzenia (*), mamy

$$[AHG] + [BFI] + [ABIH] = [ABFG] = \frac{1}{2}[ABCD] = [ABE] = [EHI] + [ABIH],$$

co po odjęciu od obu stron $[ABIH]$ daje tezę. \square

R2. Korzystając dwukrotnie z twierdzenia (*), otrzymujemy

$$\begin{aligned} [BFI] + [CEHF] + [DGE] + ([ABI] + [EGH]) &= [ABCD] - [DAF] = \frac{1}{2}[ABCD] = \\ &= [ABE] = [AIHG] + ([ABI] + [EGH]), \end{aligned}$$

co po odjęciu od obu stron $[ABI] + [EGH]$ daje tezę. \square

R3. Rozwiązanie, a przy okazji inny dowód twierdzenia (**), na rysunku 5. \square

Zadania domowe

4. Dany jest równoległobok $ABCD$ oraz punkt E należący do boku BC . Przez punkt D prowadzimy prostą k równoległą do prostej AE . Na prostej k obieramy takie punkty K, L , że czworokąt $AEKL$ jest równoległobokiem. Udowodnij, że równoległoboki $ABCD$ i $AEKL$ mają równe pola.

5. W sytuacji z zadania 2 (rys. 4), wykaż, że $[ABI] + [EGH] = [DAG] + [FHI]$.

6. Punkt E należy do boku AB równoległoboku $ABCD$, punkt F – do boku CD . Odcinki AF i DE przecinają się w punkcie G , odcinki BF i CE przecinają się w punkcie H . Wykaż, że

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad [DAG] + [BCH] &= [EHFG], \\ \text{(b)} \quad [AEG] + [BHE] &= [CFH] + [DGF]. \end{aligned}$$