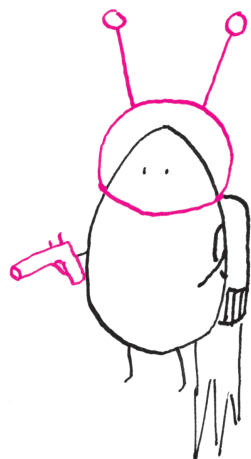


Kosmiczne jaja

Michał BEJGER



Na marginesie – pozostawmy w kosmosie – wśród obiektów astronomicznych znamy dwie mgławice związane z jajem: mgławicę protoplanetarną Jajo (RAFGL 2688, w gwiazdozbiornie Łabędzia) oraz mgławicę Zepsute Jajko (OH 231.84+4.22, gwiazdozbiór Ruffy), której nazwa wzięła się z wyjątkowo dużej zawartości siarki w obserwowanym widmie.

Ruch obiegowy Ziemi wokół Słońca przy stałym kierunku osi obrotu planety i nachyleniu do płaszczyzny orbity sprawia, że w ziemskiej pogodzie pojawiają się cyklicznie pory roku. Obecnie promienie słoneczne padają na północną półkulę pod coraz większym kątem, średnia temperatura rośnie, dzień staje się dłuższy, a noc krótsza, co naturalnie skłania do rozważań o odchodzącej zimie i odradzającym się z nadchodzącą wiosną życiu. Zdziwiająca, że jednym z wykorzystywanych przez praktycznie wszystkie kultury symbolem wiosny i nowego życia jest jajo; występuje w odkrywanych przez archeologów obrzędach egipskich, perskich i chińskich, słowiańskich oraz chrześcijańskich. Nie będziemy rozważać tu szczegółów egzegezy symbolu jaja w różnych religiach, zastanowimy się natomiast nad jego kształtem. Okazuje się, że wiele gatunków ptaków znosi jaja niesymetryczne, tj. takie, które z jednej strony są bardziej spłaszczone. Ewolucjoniści tłumaczą tę niesymetryczność naturalną selekcją wynikającą z wpływu środowiska życia danego gatunku: niesymetryczne jajo, które wypadło z gniazda i stacza się po nachylonym zboczku, ma większą tendencję do zatrzymania się w stabilnej pozycji niż jajo symetryczne (jaja żółwi składane w dołach w ziemi są natomiast praktycznie kuliste). Jajo jest także dowodem na doskonałość kształtu kopuły: stosunkowo trudno jest np. zgnieść je w dłoń.

Jak matematycznie opisać kształt jaja? Doskonale wszystkim znany kształt przekroju podłużnego kurzego jaja nie jest elipsą, ma z nią jednak coś wspólnego, a związek ten można zaprezentować za pomocą badań astronomicznych. Jak wiadomo, elipsa to krzywa, po której – według Keplera i Newtona – poruszają się planety; z definicji suma $r_1 + r_2$ odległości od ognisk jest w przypadku elipsy stała. Podobną w zamyśle krzywą opisał w 1680 r. francuski astronom Giovanni Cassini, studiując względną odległość Słońca i Ziemi. W modelu Cassiniego Słońce porusza się wokół Ziemi znajdującej się w jednym z ognisk po krzywej spełniającej warunek $r_1 \cdot r_2 = b$. Przy założeniu, że ogniska znajdują się w odległości a , równanie tego owalu we współrzędnych kartezjańskich to

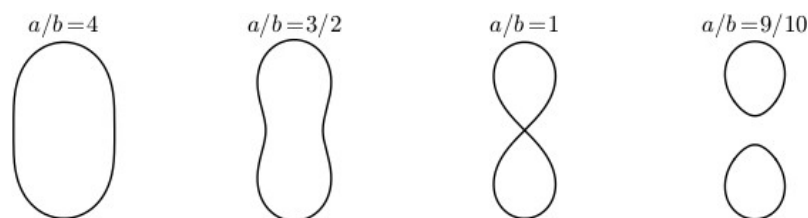
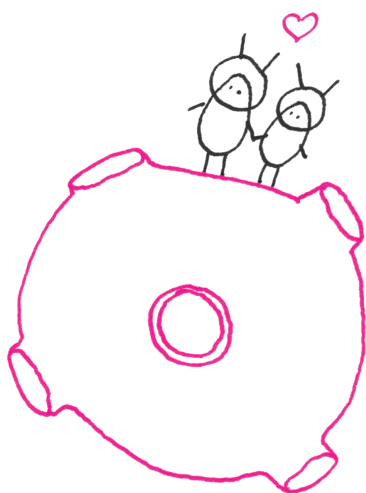
$$(1) \quad (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - b^4 = 0,$$

we współrzędnych biegunowych natomiast

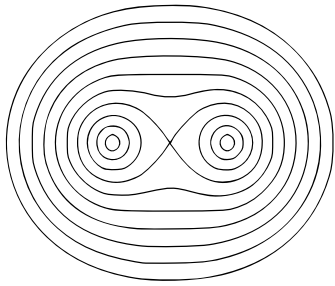
$$(2) \quad r^2 = 2 \cos 2\phi + \frac{a-b}{r^2}.$$

Za charakter krzywej odpowiada wartość parametru a/b . Dla $a/b > 1$ mamy jedną krzywą (dla $a/b < 2$ owal jest spłaszczony i przypomina fistaszek, podczas gdy $a/b > 2$ daje krzywą przypominającą elipsę), natomiast $a/b < 1$ produkuje dwa jajopodobne obrysy. Szczególny przypadek $a = b$ nazywa się lemniskatą Bernoulliego – otrzymany wtedy kształt wygląda jak symbol nieskończoności i jest podobny do oglądanej pod odpowiednim kątem wstęgi Möbiusa (*lemniscus* to po grecku wstążka). Inną, nietrywialną metodą otrzymania owalu Cassiniego jest krojenie torusa płaszczyznami równoległymi do jego osi.

Pozostając w temacie orbit i oddziaływania grawitacyjnego, podobną w kształcie do owalu Cassiniego krzywą badał w XIX w. matematyk Arthur Cayley (1821–1895). Owale Cayleya to nic innego jak krzywe stałego potencjału



Rys. 1. Owale Cassiniego dla różnych wartości parametru a/b .



Rys. 2. Owale Cayleya.

grawitacyjnego (bądź elektrycznego), dla dwóch takich samych mas (lub ładunków), czyli rozwiązania równania we współrzędnych dwubiegunowych

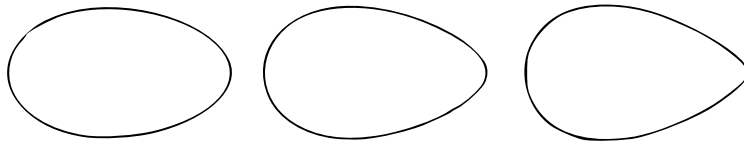
$$(3) \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = a.$$

Owal Cayleya jest krzywą stopnia ósmego.

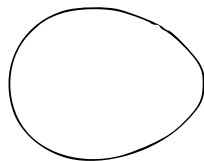
Jajo można, oczywiście, otrzymać niewielkim kosztem, zniekształcając nieco elipsę, na przykład w ten sposób:

$$(4) \quad x^2 + y^2(1 + ax) = 1, \quad \text{a także} \quad x^2 + \frac{y^2}{1 + ax} = 1.$$

Drugie z powyższych równań daje szczególnie zadowalające kształty dla $a < 1$.



Rys. 3. Jajowata krzywa będąca liniowym zniekształceniem elipsy. Obrisy dla parametru $a = 1/5, 1/2$ i $3/4$ dla drugiego z równań (4).



Rys. 4. Jajo Newtona.

Podobną krzywą opisał w 1710 r. Izaak Newton:

$$(5) \quad y^2 = (x^2 - 1)(x - a).$$

Dla dodatnich wartości parametru a przypomina ona jajo, w związku z czym czasami nazywa się ją jajem Newtona (rys. 4).

Wśród twórców jajowatych kształtów nie może zabraknąć Johannesesa Keplera. Oprócz elips badał on także inne krzywe, na przykład taki oto kształt (zwany czasem listkiem, łac. *folium*, Keplera),

$$(6) \quad (x^2 + y^2)^2 = ax^3, \quad \text{a we współrzędnych biegunowych} \quad r = a \cos^3 \theta,$$

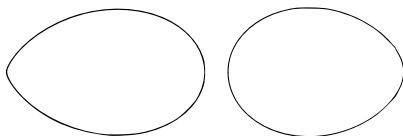
oraz inną krzywą, także zwaną listkiem Keplera,

$$(7) \quad (x^2 + y^2)^2 + ax^3 = (1 - a)xy^2 \quad \text{oraz} \quad r = (\sin^2 \theta - a) \cos \theta,$$

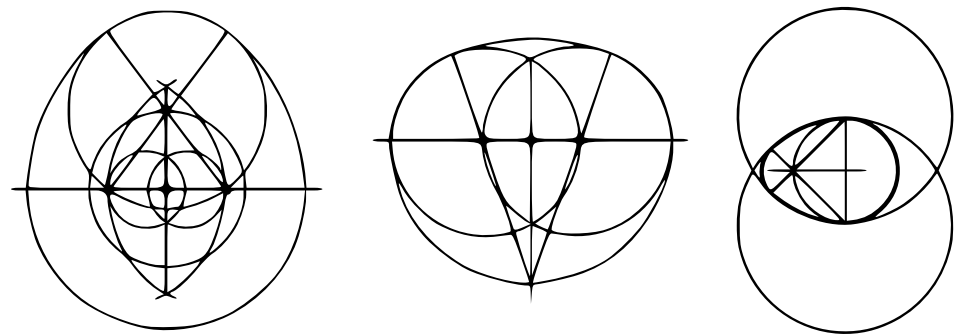
która dla $a > 1$ składa się z jednego, obłego kształtu. Jajowatych kształtów

opisywanych przez równania analityczne jest, oczywiście, o wiele więcej (<http://www.mathematische-basteleien.de/eggcurves.htm>), nie wspominając o innych możliwościach otrzymywania podobnych kształtów, np. poprzez konstrukcje geometryczne. Tak powstają np. tzw. jaja Thoma oraz Mossa, przedstawione na rysunku 6. Pierwsza z tych metod, opisana przez szkockiego inżyniera Alexandra Thoma, była być może używana do konstrukcji kamiennych megalitycznych kręgów typu Stonehenge, służących do pomiarów pierwszym badającym niebo archeoastronomom.

Przybliżając w tym artykule kształt jaja, ograniczyliśmy wybór do wyników otrzymywanych przez historycznych (a nawet prehistorycznych!) astronomów. Wierzmy, że nadchodząca wiosna i związane z nią jajeczne obrzędy będą dobrą motywacją, nie tylko dla Czytelników Dociekliwych, do samodzielnego skonstruowania/narysowania tych nieco mniej standardowych, ale dobrze zasłużonych nauce pisanek.



Rys. 5. Listki Keplera (6) i (7), obie krzywe dla parametru $a = 1,5$.



Rys. 6. Jajo konstruowalne – metoda Thoma (pierwsze dwa rysunki) i Mossa.