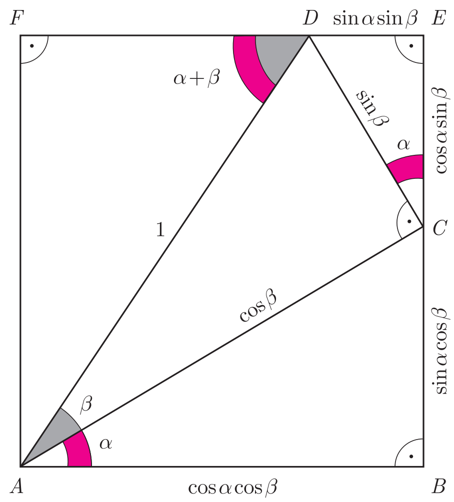
Trygonometria obrazkowa

Joanna JASZUŃSKA

Czasem jeden rysunek pozwala dowieść tak wiele... Rozważmy trójkąt ABC o kątach $\sphericalangle BAC = \alpha$ oraz $\sphericalangle ABC = 90°$. Na jego przeciwprostokątnej AC zbudujmy, na zewnątrz, trójkąt ACD o kątach $\sphericalangle DAC = \beta$ oraz $\sphericalangle ACD = 90°$, przy czym $\alpha + \beta < 90°$. Całość „domknijmy" do prostokąta $ABEF$, jak na rysunku 1. Wówczas $\sphericalangle DCE = \alpha$ (bo $\sphericalangle ACB = 90° - \alpha$) oraz $\sphericalangle ADF = \alpha + \beta$ (bo $DF \parallel AB$).

Wzory na $\sin(\alpha+\beta)$ oraz $\cos(\alpha+\beta)$

Niech $AD = 1$. Wyznaczmy kolejno długości przyprostokątnych w trójkątach ACD, ABC oraz CED:



Rys. 1

W trójkącie ADF przeciwprostokątna $AD = 1$, więc

$$\sin(\alpha+\beta) = AF = BC + CE,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = DF = AB - DE,$$

czyli

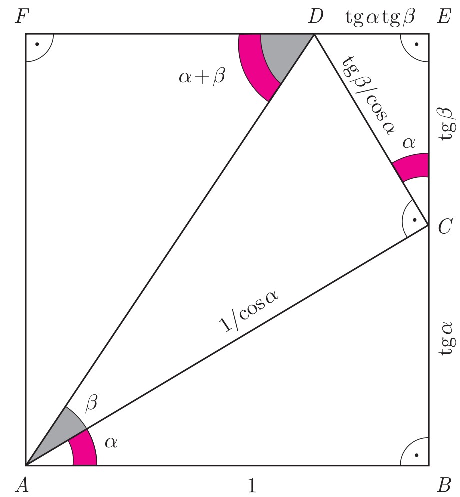
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Podobnie, oznaczając $\sphericalangle CAF = \alpha$, można wyprowadzić wzory na $\sin(\alpha-\beta)$ oraz $\cos(\alpha-\beta)$ dla $\beta < \alpha < 90°$.

Wzór na $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

Przyjmijmy, iż $AB = 1$ (rys. 2) i kolejno wyznaczmy długości boków trójkątów ABC, ACD i CED.
W trójkącie ADF mamy $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{AF}{DF} = \frac{BC+CE}{AB-DE}$, stąd

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$



Rys. 2

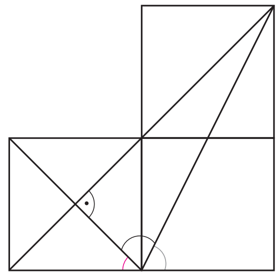
Podobnie, przyjmując $\sphericalangle CAF = \alpha$ oraz $BC = 1$, można wyprowadzić wzór na $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ dla $\beta < \alpha < 90°$.

Oznaczając dodatkowo $\sphericalangle DAF = \gamma$, otrzymujemy $DF = AF\operatorname{tg}\gamma = (BC+CE)\operatorname{tg}\gamma = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\gamma$. Ponieważ $DE + DF = AB = 1$, płynie stąd wniosek, iż

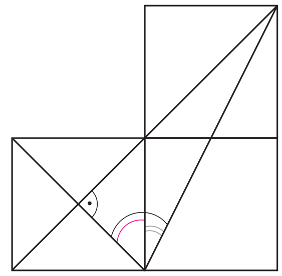
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = 1 \quad \text{dla} \quad \alpha+\beta+\gamma = 90°.$$

Wzory wyprowadzone powyżej dla odpowiednio małych kątów są prawdziwe także ogólnie.

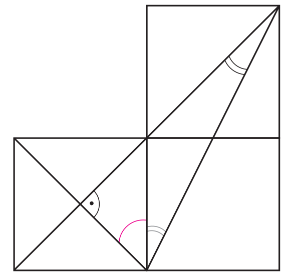
A oto kilka mniej znanych równości, które też wszystkie wynikają z jednego obrazka — tym razem zbudowanego z trzech kwadratów. Dla $x > 0$ *kąt* $\operatorname{arctg} x$ *to taki kąt ostry, którego tangens równy jest* x, np. $\operatorname{arctg} 1 = 45°$. Odnalezienie na rysunkach odpowiednich trójkątów prostokątnych pozostawiamy Czytelnikom.



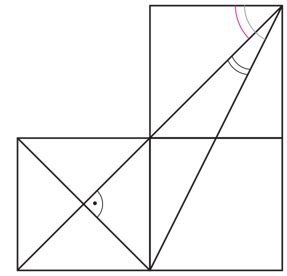
$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = 180°$



$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 3$



$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = 90°$



$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \operatorname{arctg} 2$