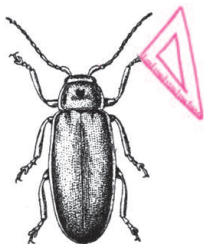


Czy matematyk pracuje, czy się bawi?



Homo oeconomicus

Zawód matematyka ma wiele zalet.

Homo oeconomicus za główną z nich uważa taniosc. Faktycznie, obiekty badań matematyków nie są z tego świata, nie można zatem kupić ich ani w specjalistycznej hurtowni, ani w supermarkecie, ani nawet w osiedlowym sklepiku.

Homo oecologicus jako główną zaletę wymieni fakt, iż matematyczne obiekty nie podlegają cywilizacyjnym zanieczyszczeniom i wynikającym z nich deformacjom.

Homo logisticus wskaże obywanie się bez laboratoriów, a nawet właściwie bez odpowiednich pomieszczeń. Matematykę istotnie można uprawiać wszędzie.

Homo libertinus wskaże niezależność matematyki od ideologii i polityki.

Są wreszcie i tacy, którzy są przekonani, iż myśl matematyczna buja w nieosiągalnych dla niematematyków przestworzach i tym sposobem jest bardziej niezależna niż jakokolwiek inna myśl.

Wszystko to pewnie prawda, ale moje obserwacje kolegów matematyków kazałyby mi wymienić dwie inne, wyróżniające ten zawód zalety. Pierwsza z nich to nieprawdopodobna wręcz obfitosc problematyki – nie sposób wymienić sytuację, która nie mogłaby stać się inspiracją do podjęcia matematycznego dociekania. Druga zaś to fakt, że matematyk pracując, bawi się, że praktycznie każda forma zabawy może posłużyć jako alegoria matematycznych dociekań.

Ostatnio miałem okazję zaobserwować to w niemal czystej formie. Jeden z moich kolegów – nazwijmy go Jurkiem – szperał po artykułach w różnych czasopismach, poszukując przykłądu zaleźności, która miała upogładowić prezentację jego aktualnych prac. I tak trafił na artykuł Junpei Sekino *n-Ellipses and the minimum distance sum problem* w *American Mathematical Monthly*, Vol. 106, No. 3 (1999), 193–202.

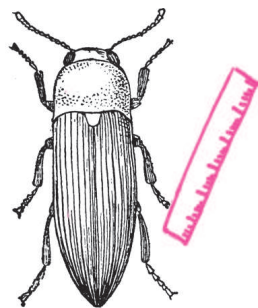
Niezależnie od powodu napisania wymienionego artykułu, możemy w nim znaleźć definicję *n*-elipsy jako zbioru punktów, których suma odległości od danych *n* punktów jest stała. Gdy jako punkty weźmiemy wierzchołki *n*-kąta foremnego, a sumie odległości każemy być równą odległości jednego z nich od pozostałych, to powstanie właśnie figura, której własności były potrzebne Jurkowi. W szczególności chciał wiedzieć, czy krzywa ta jest gładka, czy też może ma dziobki. Oczywiście, dziobki mogłyby się pojawić tylko w wierzchołkach *n*-kąta. Ale jak stwierdzić, czy są?

Kiedy zapoznał mnie ze swoim problemem, postanowiłem to sprawdzić w najprostszej sytuacji, czyli dla trójkąta. A że nie miałem sensownego pomysłu, więc zacząłem liczyć, co okazało się do tego stopnia męczące, że tę drogę poszukiwania odpowiedzi uznałem za głupią. Powiedziałem też o tym przy jakiejś okazji koledze – nazwijmy go Zbyszkim. Ten uznał, że moje trudności to jeszcze jeden przykłąd na to, jak jestem zacofany, i wpuścił rzecz do *Mathematiki*, która stwierdziła, że krzywa jest gładka. Ale to mu nie odpowiadało, więc poszukał błędu w swoim wpuszczaniu, znalazł go, poprawił i wtedy *Mathematica* powiedziała (i pokazała – patrz rysunek), że dziobki są.

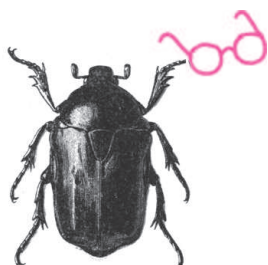
No i wtedy zawstydził się, że zabrał się do geometrii z komputerem – to tak, jakby z nożem do ryby. Więc rozwiązał problem dla trójkąta metodami klasycznej geometrii, ale tak go to rozochociło, że odkrył, o co tak naprawdę w tym problemie chodzi, i rozwiązał go klasycznie dla dowolnego *n*, co jest przedstawione na następnych stronach.

W moim przekonaniu dowodzi to niezbitcie tego, od czego zacząłem ten tekst.

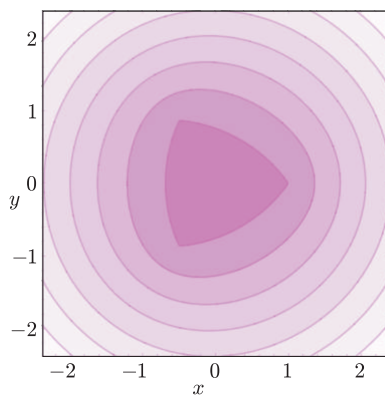
Marek



Homo oecologicus



Homo libertinus



Poziomice funkcji

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \\ & + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \\ & + \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} - 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$



Rozwiązanie zadania M 1400.
 Przypuśćmy przeciwnie, że po pewnej liczbie kroków zmaszaliśmy wszystkie liczby. Powiedzmy, że w ostatnim kroku wybraliśmy liczbę l . Skoro została ona zmaszana, to $l \mid p + l$, czyli również $l \mid p$, a zatem $l = 1$ lub $l = p$.

Wykażemy najpierw, że musieliśmy wykonać co najmniej trzy kroki. Jest jasne, że wykonaliśmy więcej niż jeden. Przypuśćmy więc, że po dwóch krokach wszystkie liczby zostały zmaszane. Niech k i l będą odpowiednio liczbami wybranymi w pierwszym i drugim kroku. Ponieważ liczba 1 zniknęła z tablicy po pierwszym kroku, więc $l = p$, co oznacza, że po pierwszym kroku na tablicy były wyłącznie liczby 2 i p lub tylko p . Ponieważ $2 < p - 1 < p$, więc $p - 1$ zmaszaliśmy w pierwszym kroku, a zatem $p - 1 \mid p + k$. Natomiast z nierówności $p - 1 < p + k < 3(p - 1)$ wynika, że $p + k = 2(p - 1)$, czyli $k = p - 2$. Ale $p - 2$ też musiało zostać zmaszane w pierwszym kroku, więc $p - 2 \mid 2(p - 1)$, co jest niemożliwe.

Załóżmy teraz, że w przedostatnim kroku (który nie jest jednocześnie pierwszym) wybraliśmy liczbę m . Ta liczba nie została zmaszana w tym kroku, gdyż $m \mid m + p$ oznacza, że $m = 1$ lub $m = p$, ale 1 zniknęła w pierwszym kroku, a p musi być wybrane w ostatnim kroku. Zatem m zmaszujemy w ostatnim kroku, czyli $m \mid 2p$, więc $m = 2$. Wobec tego w przedostatnim kroku mogliśmy wymazać tylko dzielniki liczby $p + 2$. Ale ta liczba jest pierwsza, więc nie wymazaliśmy nic, co daje sprzeczność.

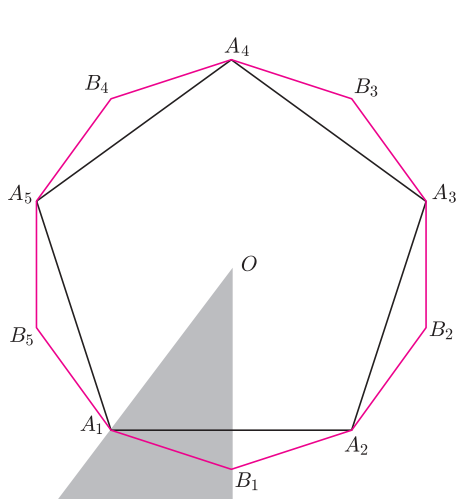
Zadanie – przypadek ogólny. Wykazać, że jeśli $A_1 \dots A_n$ jest n -kątem foremny, to krzywa płaska K , składająca się z punktów X , spełniających warunek

$$|XA_1| + |XA_2| + \dots + |XA_n| = |A_1A_1| + |A_1A_2| + \dots + |A_1A_n|,$$

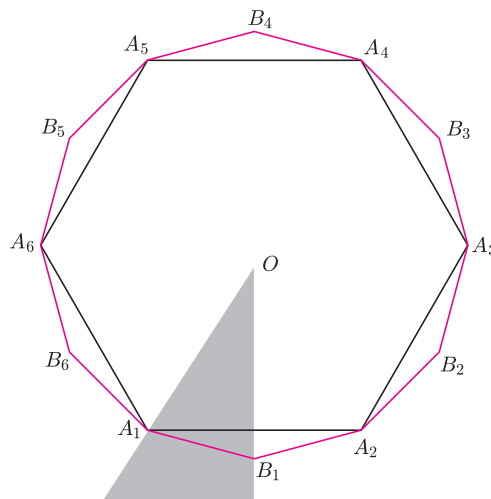
ma ostrza w wierzchołkach A_i wielokąta.

Rozwiązanie rozpoczniemy od dowodu następującej obserwacji.

Stwierdzenie. Krzywa K jest zawarta w $2n$ -kącie foremnym $A_1B_1 \dots A_nB_n$.



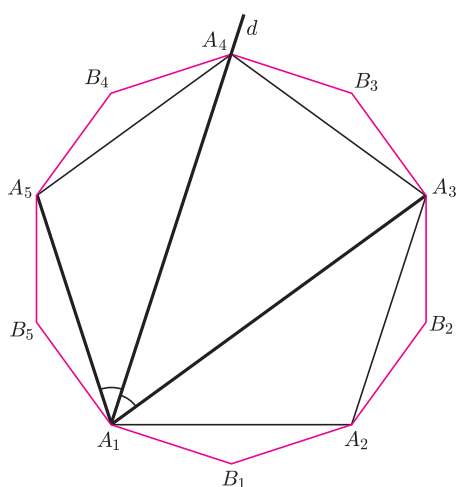
Rys. 1



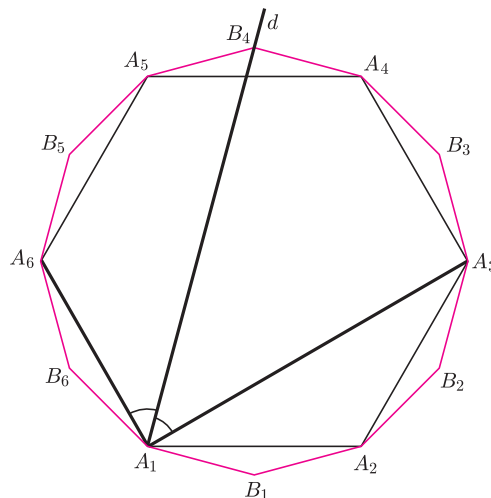
Rys. 2

Dowód. Ponieważ symetrie wielokąta $A_1 \dots A_n$ przeprowadzają krzywą K na siebie, wystarczy udowodnić, że każdy punkt krzywej K , leżący w kącie A_1OB_1 , jest punktem trójkąta A_1OB_1 .

W tym celu rozważmy dwusieczną d kąta $A_3A_1A_n$:



Rys. 3

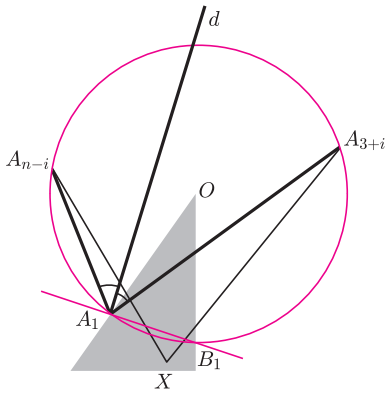


Rys. 4

Gdy n jest nieparzyste, jest to prosta $A_1A_{(n+3)/2}$; gdy n jest parzyste, dwusieczną jest prosta $A_1B_{(n+2)/2}$.

Wykażemy, że $d \perp A_1B_1$. W tym celu zauważmy, że $\sphericalangle A_3A_1A_2 = \frac{\pi}{n}$ oraz $\sphericalangle A_2A_1B_1 = \frac{\pi}{2n}$, jako kąty wpisane oparte odpowiednio na $\frac{1}{n}$ lub $\frac{1}{2n}$ części okręgu opisanego. W podobny sposób ustalamy, że $\sphericalangle A_3A_1A_n = \frac{(n-3)\pi}{n}$. Wobec tego kąt, jaki tworzy prosta d z prostą A_1B_1 , jest równy

$$\frac{1}{2} \sphericalangle A_3A_1A_n + \sphericalangle A_3A_1A_2 + \sphericalangle A_2A_1B_1 = \frac{(n-3)\pi}{2n} + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}.$$



Rys. 5

Zauważmy, że prosta d jest też dwusieczną każdego z kątów $A_{3+i}A_1A_{n-i}$, dla $i = 0, 1, \dots, \lfloor (n-4)/2 \rfloor$, gdyż każdy z tych kątów powstaje z kąta $A_3A_1A_n$ przez odjęcie po obu stronach dwusiecznej tej samej wielokrotności kąta o mierze $\frac{\pi}{n}$.

Rozważmy jeden z tych kątów oraz pewien punkt X , który należy do kąta A_1OB_1 , ale leży poza trójkątem A_1OB_1 (rys. 5).

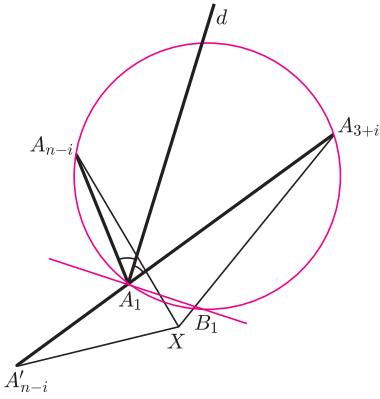
Wykażemy, że $|XA_{n-i}| + |XA_{3+i}| \geq |A_1A_{n-i}| + |A_1A_{3+i}|$. W tym celu odbijmy punkt A_{n-i} symetrycznie względem prostej A_1B_1 (rys. 6).

Z tego, że d jest dwusieczną kąta $A_{3+i}A_1A_{n-i}$ oraz $d \perp A_1B_1$, wynika, że punkty A'_{n-i}, A_1, A_{3+i} są współliniowe. Mamy zatem dla $0 \leq i \leq \lfloor (n-4)/2 \rfloor$

$$(*) \quad |XA_{n-i}| + |XA_{3+i}| \geq |XA'_{n-i}| + |XA_{3+i}| \geq |A'_{n-i}A_{3+i}| = |A_1A_{n-i}| + |A_1A_{3+i}|,$$

Gdy n jest liczbą parzystą, każdy z wierzchołków A_3, \dots, A_n występuje w dokładnie jednej z powyższych nierówności (*). Mamy zatem

$$\begin{aligned} |XA_1| + |XA_2| + \dots + |XA_n| &= \\ &= |XA_1| + |XA_2| + \sum_{i=0}^{(n-4)/2} |XA_{n-i}| + |XA_{3+i}| \geq \\ &\geq |XA_1| + |XA_2| + \sum_{i=0}^{(n-4)/2} |A_1A_{n-i}| + |A_1A_{3+i}| > \\ &> |A_1A_2| + \sum_{i=0}^{(n-4)/2} |A_1A_{n-i}| + |A_1A_{3+i}| = \sum_{j=2}^n |A_1A_j|. \end{aligned}$$



Rys. 6

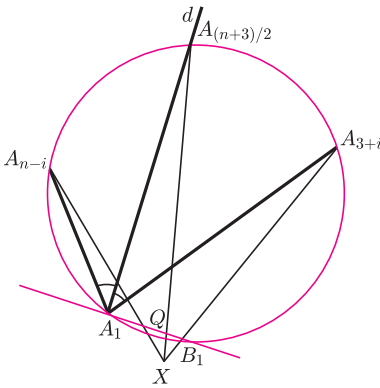
Gdy n jest liczbą nieparzystą, w nierównościach (*) występują wszystkie wierzchołki A_3, \dots, A_n z wyjątkiem $A_{(n+3)/2}$, który wtedy leży na prostej d (rys. 7).

Jeśli Q jest punktem przecięcia odcinków $XA_{(n+3)/2}$ oraz A_1B_1 , to mamy

$$|XA_{(n+3)/2}| \geq |QA_{(n+3)/2}| \geq |A_1A_{(n+3)/2}|,$$

gdyż trójkąt $QA_1A_{(n+3)/2}$ jest prostokątny. Wynika stąd

$$\begin{aligned} |XA_1| + |XA_2| + \dots + |XA_n| &= \\ &= |XA_1| + |XA_2| + |XA_{(n+3)/2}| + \sum_{i=0}^{(n-5)/2} |XA_{n-i}| + |XA_{3+i}| \geq \\ &\geq |XA_1| + |XA_2| + |A_1A_{(n+3)/2}| + \sum_{i=0}^{(n-5)/2} |A_1A_{n-i}| + |A_1A_{3+i}| > \sum_{j=2}^n |A_1A_j|. \end{aligned}$$



Rys. 7

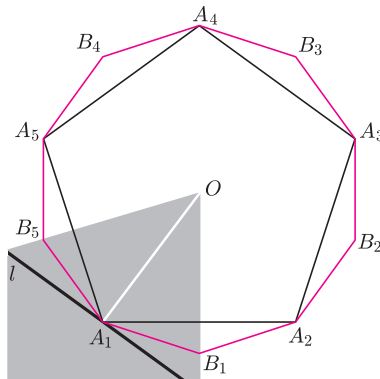
W każdym więc przypadku punkt X nie należy do krzywej K , co kończy dowód stwierdzenia.

Łatwo teraz wykazać, że krzywa K nie jest gładka w punktach A_i , to znaczy nie ma w tych punktach stycznej. Ze względu na niezmienniczość K na obroty wielokąta wystarczy przeprowadzić dowód dla jednego z wierzchołków, np. dla A_1 (rys. 8).

Oczywiście, $A_1 \in K$. Zauważmy, że punkty krzywej K , leżące w pobliżu punktu A_1 , są zawarte w kącie $B_1A_1B_n$. Gdyby prosta ℓ była styczna do krzywej K w punkcie A_1 , to z niezmienniczości K ze względu na symetrię w prostej OA_1 wynikałoby, że $\ell \perp OA_1$. Ale wtedy, z definicji stycznej jako granicy siecznych wynika, że istnieje taki ciąg punktów $X_i \in K$, że kąty, jakie tworzą wektory X_iA_1 z prostą ℓ , dążą do zera, czyli $\sphericalangle OA_1X_i \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Tymczasem mamy zawsze

$$\begin{aligned} \sphericalangle OA_1X_i &\leq \sphericalangle OA_1B_1 = \sphericalangle OA_1A_2 + \sphericalangle A_2A_1B_1 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\pi - \frac{2\pi}{n} \right) + \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}, \end{aligned}$$

sprzeczność, która kończy rozwiązanie zadania.



Rys. 8

Udział wzięli Marek KORDOS, Zbigniew MARCINIAK, Jerzy TYSZKIEWICZ