

Udowodnimy kilka ewidentnych bzdur, na przykład istnienie okręgu o dwóch środkach czy równość $90^\circ = 110^\circ$. Zachęcam Czytelników do samodzielnego odszukania błędów w tych dowodach przed lekturą zamieszczonych na końcu wyjaśnień.

1. Istnieje okrąg o dwóch środkach.

D. Rozważmy dwie nierównoległe proste k i l oraz punkt A poza nimi (rys. 1). Punkty B i C to rzuty punktu A odpowiednio na proste k i l . Proste te nie są równoległe, stąd odcinki AB i AC też nie są, więc powstaje trójkąt ABC .

Okrąg opisany na trójkącie ABC przecina proste k i l odpowiednio w punktach D i E . Wtedy $\sphericalangle ABD = 90^\circ$, więc odcinek AD jest średnicą tego okręgu, a środek AD – środkiem okręgu. Analogicznie $\sphericalangle ACE = 90^\circ$, więc odcinek AE też jest średnicą okręgu, a środek AE – drugim środkiem okręgu. \square

2. Istnieje trójkąt o dwóch kątach prostych.

D. Rozważmy przecinające się okręgi Γ_1 i Γ_2 (rys. 2). Niech A będzie jednym z ich wspólnych punktów oraz niech AB i AC będą średnicami odpowiednio Γ_1 i Γ_2 . Prosta BC przecina okręgi Γ_1 i Γ_2 odpowiednio w punktach D i E .

W trójkącie ADE kąt ADE jest prosty jako wpisany w okrąg Γ_1 , oparty na średnicy AB . Analogicznie kąt AED jest drugim kątem prostym w tym trójkącie. \square

3. Każdy trójkąt jest równoboczny.

D. Przypuśćmy, że $AB \neq AC$ w pewnym trójkącie ABC (rys. 3). Dwusieczna kąta BAC nie jest wtedy wysokością tego trójkąta, więc przecina symetralną boku BC w pewnym punkcie S . Punkty X, Y, Z to rzuty punktu S odpowiednio na proste BC, AC, AB .

Wówczas $\triangle ASZ \equiv \triangle ASY$ (bo mają równe kąty i wspólny bok AS), stąd $AZ = AY$ oraz $SZ = SY$. Ponadto S leży na symetralnej odcinka BC , więc $SB = SC$.

Z ostatnich dwóch równości wynika, że trójkąty prostokątne SBZ i SCY też są przystające, więc $BZ = CY$. Zatem $AB = AZ - BZ = AY - CY = AC$, sprzecznie z założeniem. \square

4. $90^\circ = 110^\circ$.

D. Rozważmy prostokąt $ABCD$ (rys. 4). Punkt E , na zewnątrz tego prostokąta, spełnia warunki $BE = BC$ oraz $\sphericalangle CBE = 20^\circ$. Symetralne odcinków AB i DE przecinają się w punkcie F . Wówczas $FA = FB$ oraz $FD = FE$. Ponadto z założenia $AD = BC = BE$. Wobec powyższego trójkąty FAD i FBE są przystające, a stąd $\sphericalangle FAD = \sphericalangle FBE$.

Trójkąt FAB jest równoramienny ($FA = FB$), zatem $\sphericalangle FAB = \sphericalangle FBA$.

Podsumowując, mamy $90^\circ = \sphericalangle BAD = \sphericalangle FAD - \sphericalangle FAB = \sphericalangle FBE - \sphericalangle FBA = \sphericalangle ABE = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBE = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$. \square

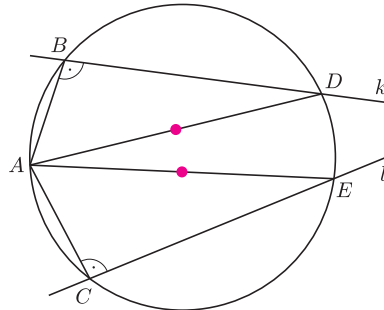
Rozwiązania

R1. Rozważany okrąg przechodzi przez punkt przecięcia prostych k i l . Pokrywają się punkty D i E , więc również średnice AD i AE , a także ich środki. \square

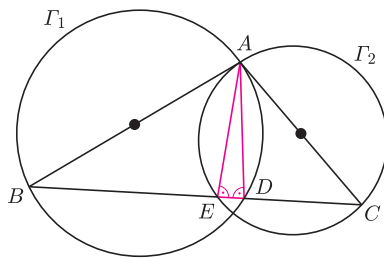
R2. Punkty D i E pokrywają się (i znajdują się w punkcie przecięcia okręgów Γ_1 i Γ_2 , różnym od A). Trójkąt ADE jest więc zdegenerowany do odcinka. \square

R3. Punkt S jest środkiem tego łuku $\overset{\frown}{BC}$ okręgu opisanego na trójkącie ABC , do którego nie należy punkt A , bo środek ten leży i na dwusiecznej kąta BAC , i na symetralnej boku BC . Czworokąt $ABSC$ jest więc wpisany w okrąg, stąd $\sphericalangle ABS + \sphericalangle ACS = 180^\circ$. Jeśli oba te kąty są proste, to $\triangle ABS \equiv \triangle ACS$, czyli $AB = AC$. Zatem jeden z kątów ABS, ACS jest ostry, a drugi rozwarty. Przyjmijmy, że kąt ACS jest ostry. Wówczas punkt Y należy do boku AC , a punkt Z leży poza odcinkiem AB . Stąd $AB = AZ - BZ$, ale $AC = AY + CY$. \square

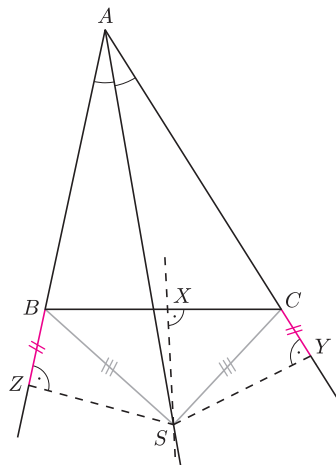
R4. Symetralna boku AB jest jednocześnie symetralną boku CD . Punkt F , jako punkt przecięcia symetralnych odcinków CD i DE , jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDE , więc leży także na symetralnej odcinka CE . Leży na niej również punkt B . Oznacza to, że trójkąt FBE nie wygląda tak, jak na rysunku 4 – punkt E leży po przeciwnej stronie prostej FB . Wobec tego kąt FBE w tym trójkącie nie jest sumą kątów FBA i ABE , tylko jej dopełnieniem do 360° . \square



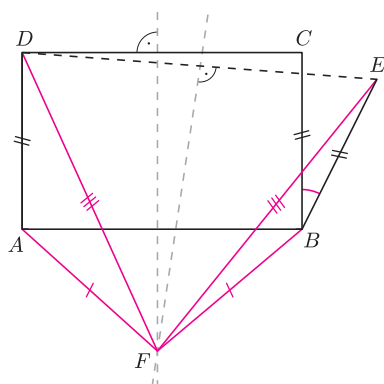
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4