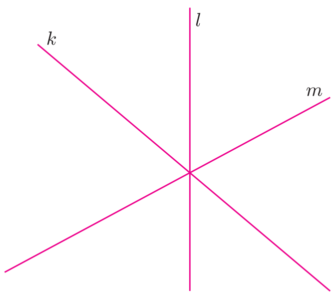
Symetralna i dwusieczna
– bliźnięta jedno- czy dwujajowe?

Symetralna to oś symetrii odcinka, a dwusieczna – kąta.
W trójkącie tak symetralne, jak dwusieczne, przecinają się w jednym punkcie.

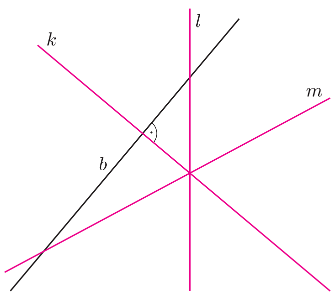


Rys. 1

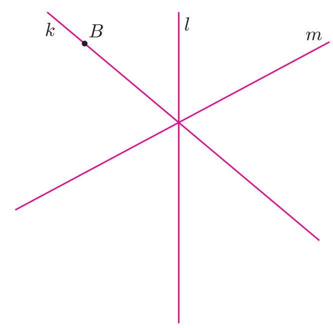
Rozwiążmy zadanie:
Dane są trzy proste przecinające się w jednym punkcie (rys. 1).
Znaleźć trójkąt, dla którego są one
1° *symetralnymi boków;*
2° *dwusiecznymi kątów.*

Oto jedno rozwiązanie obu tych zadań. Posłużymy się tutaj dualnością: tam gdzie dla 1° będzie mowa o prostej, w 2° będzie mowa o punktach. I przeciwnie.

Jeśli jakiś trójkąt rozwiązuje nasze zadanie, to każdy jednokładny do niego względem punktu wspólnego danych prostych też je rozwiązuje. Możemy więc jeden element trójkąta (w 1° prostą zawierającą bok, w 2° wierzchołek kąta) przyjąć dość dowolnie. Zatem do roboty!



Rys. 2.1



Rys. 2.2

Obieramy

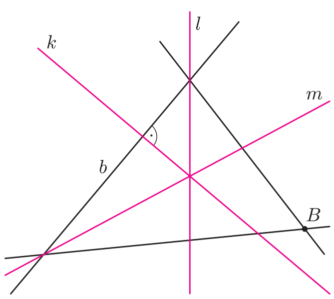
1° prostą b prostopadłą do k
– będzie ona zawierała wierzchołki A i C szukanego trójkąta ABC;

2° punkt B na prostej k
– będzie on wierzchołkiem kąta ABC (rys. 2).

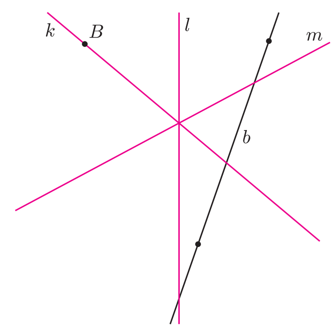
Odbijamy symetrycznie względem l i m

1° prostą b
na każdej z otrzymanych prostych musi leżeć punkt B, bo jest on obrazem A względem jednej z symetralnych (powiedzmy l) i obrazem C – względem drugiej;

2° punkt B
prosta b łącząca otrzymane punkty musi zawierać wierzchołki A i C, bo obrazy tych prostych względem dwusiecznych l i m przechodzą przez punkt B (rys. 3).



Rys. 3.1



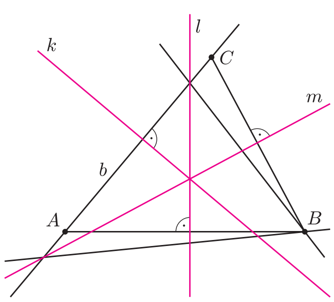
Rys. 3.2

Odbijamy symetrycznie względem l i m

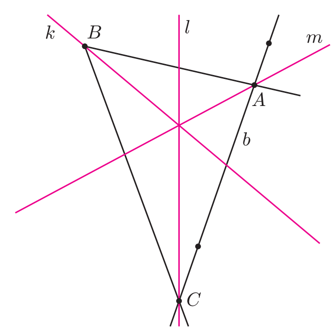
1° punkt B
– jego obrazami są punkty A i C (oczywiście, leżące na prostej b), co kończy konstrukcję;

2° prostą b
– jej obrazy (oczywiście, przechodzące przez B) wraz z b tworzą poszukiwany trójkąt (rys. 4).

Ostatni krok w konstrukcji 2° można uprościć, znajdując „na skróty” i niedualnie punkty A i C – to przecięcia b z l i m.



Rys. 4.1

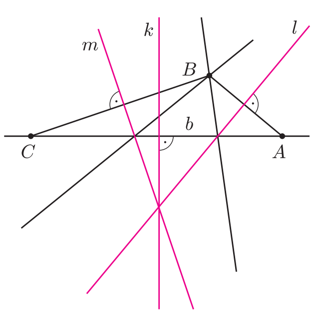


Rys. 4.2

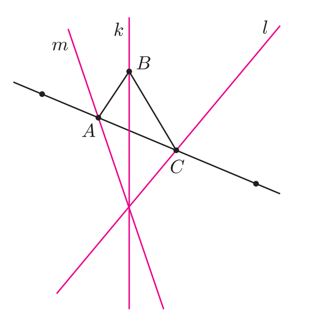
Można więc odnieść wrażenie, że odpowiedź na tytułowe pytanie brzmi: jednojajowe.

Okazuje się jednak, że wrażenie takie jest mylne, co widać wyraźnie, gdy weźmiemy inne proste k, l, m.

Dla pokazanych obok prostych w wyniku zaproponowanej konstrukcji otrzymujemy, co prawda, jakieś trójkąty (rys. 5), ale tylko ten, w którym proste mają być symetralnymi, spełnia nasze żądanie, ten drugi jest chyba bez sensu, bo przecięcie dwusiecznych to środek okręgu wpisanego w trójkąt, a ten nie może leżeć na zewnątrz trójkąta.



Rys. 5.1



Rys. 5.2

Powstają dwa pytania: dlaczego tak jest? oraz czy konstrukcja w przypadku symetralnych zawsze prowadzi do uzyskania żądanego trójkąta?

Odpowiedzi w numerze.

Marek KORDOS