W krzywym zwierciadle

Joanna JASZUŃSKA

Inwersja to przekształcenie geometryczne, określane czasem jako symetria względem okręgu. *Obrazem punktu A (różnego od S) w inwersji względem okręgu $\Gamma = \mathcal{O}(S, r)$ jest taki punkt A^* na półprostej $SA^{\rightarrow}$, że $SA \cdot SA^* = r^2$.* Zauważmy, że:

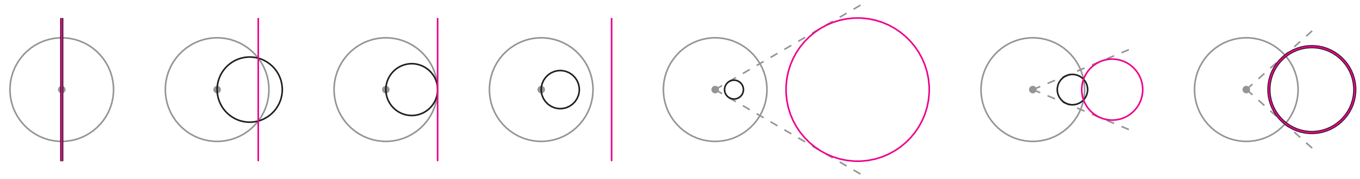
– obrazem punktu A^* jest punkt A,
– jeśli punkt A leży na okręgu Γ, to $A^* = A$,
– obraz figury zawartej w pewnym kącie XSY też jest wewnątrz tego kąta,
– obrazem prostej przechodzącej przez punkt S jest ta sama prosta.

Punkt S nazywa się *środkiem inwersji*. Nie definiujemy jego obrazu S^*.

Ogólniej okazuje się, że inwersja zachowuje okręgi i proste. Konkretnie (rys. 1):

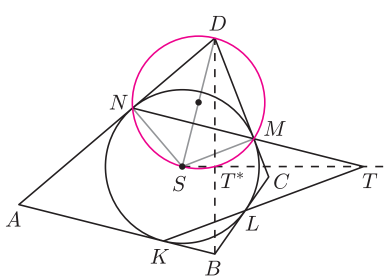
– obrazem okręgu przechodzącego przez punkt S jest prosta nieprzechodząca przez S (i na odwrót),
– obrazem okręgu nieprzechodzącego przez S jest okrąg nieprzechodzący przez S.

Dowody opisanych własności znaleźć można np. w książce *Co to jest matematyka* R. Couranta i H. Robbinsa.



Rys. 1. Niektóre pary figur i ich obrazów w inwersji względem szarego okręgu; na pierwszym i ostatnim rysunku – prosta i okrąg stały.

Inwersja to przydatne narzędzie geometryczne. Czasem do rozwiązania zadania wystarczy przekształcić jedynie mały fragment obrazka. Zazwyczaj jednak warto zastosować inwersję do całego rysunku, otrzymując nowy, na ogół kompletnie inny rysunek, na którym często łatwiej dostrzec rozwiązanie. Oto kilka przykładów.

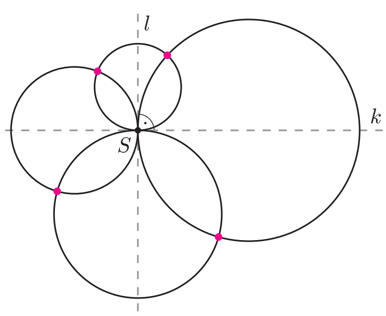


Rys. 2

1. Wyznacz obraz kwadratu opisanego na okręgu w inwersji względem tego okręgu.

2. Okrąg o środku w punkcie S i wpisany w czworokąt wypukły $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Proste KL i MN przecinają się w punkcie T. Wykaż, że proste BD i ST są prostopadłe.

3. Dane są dwa prostopadłe bałwanki o wspólnej szyi, jak na rysunku 3. Wykaż, że kolorowe punkty leżą na jednym okręgu.



Rys. 3

4. Każdy z rozłącznych okręgów Γ_1 i Γ_3 jest styczny zewnętrznie do każdego z rozłącznych okręgów Γ_2 i Γ_4. Wykaż, że punkty styczności leżą na jednym okręgu.

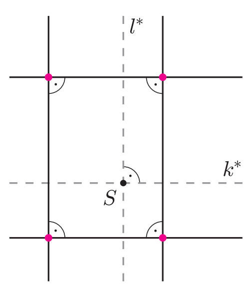
5. W czworokącie wypukłym $ABCD$ okręgi wpisane w trójkąty ABC i ACD są styczne. Wykaż, że ich punkty styczności z bokami czworokąta leżą na jednym okręgu.

Rozwiązania i wskazówki

Wskazówka 1. Bok AB kwadratu to część prostej AB, zawarta w kącie ASB.

R2. Obrazem prostej MN w inwersji względem danego okręgu jest okrąg przechodzący przez środek inwersji S i przez stałe punkty M i N (rys. 2). Leży na nim też punkt T^*, bo punkt T leży na prostej MN. Średnicą tego okręgu jest SD, ponieważ kąty SMD i SND są proste, stąd także $\sphericalangle ST^*D = 90°$.

Analogicznie $\sphericalangle ST^*B = 90°$, więc $BD \perp ST^*$. Z definicji inwersji punkty S, T^*, T są współliniowe, co kończy dowód. □



Rys. 4

R3. Rozważmy inwersję względem dowolnego okręgu o środku w punkcie S, przy oznaczeniach jak na rysunku 3. Proste k i l są stałe przy tej inwersji. Obrazem każdego z okręgów, przechodzącego przez środek inwersji, jest prosta równoległa odpowiednio do k^* lub l^* (okrąg styczny do prostej k lub l mieści się w półpłaszczyźnie przez nią wyznaczonej, więc jego obraz też, rys. 4). Zatem obrazami kolorowych punktów są wierzchołki prostokąta. Leżą one na okręgu nieprzechodzącym przez środek inwersji (bo środek ten jest wewnątrz prostokąta), więc także przed inwersją kolorowe punkty leżą na jednym okręgu. □

Wskazówka 4. Warto rozważyć inwersję o środku w jednym z punktów styczności i dowieść, że obrazy pozostałych trzech punktów są wówczas współliniowe.

Zadanie 2 pochodzi z XLVIII Olimpiady Matematycznej.

Wskazówka 5. Warto rozważyć inwersję o środku w punkcie styczności okręgów.