deltoid 52

# Mnóstwo rachunków?

*Joanna JASZUŃSKA*

Geometria analityczna kojarzona bywa z dużą ilością rachunków, takie rozwiązania często są długie i pracochłonne. Oto kilka przykładów, że nie zawsze jest tak źle.

**1.** Dany jest trójkąt równoboczny $ABC$ oraz dowolny punkt $P$ na jego okręgu wpisanym. Wykaż, że suma $PA^2 + PB^2 + PC^2$ nie zależy od wyboru punktu $P$.

**2.** Rozstrzygnij, ile rozwiązań ma układ równań $\begin{cases} x+y+z=1, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$

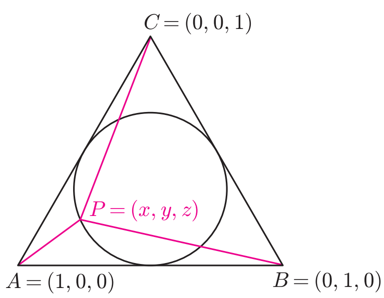
**3.** Rozstrzygnij, ile rozwiązań ma układ równań $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=20, \\ (x+4)^2+(y+2)^2=5. \end{cases}$

**4.** W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty $M$ i $N$ są odpowiednio środkami boków $AB$ i $CD$, zaś przekątne przecinają się w punkcie $E$. Wykaż, że prosta zawierająca dwusieczną kąta $BEC$ jest prostopadła do prostej $MN$ wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BD$.

**5.** W czworościanie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykaż, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są parami prostopadłe.

---

## Rozwiązania




Rys. 1. Odległość punktów $(x_1, y_1, z_1)$ i $(x_2, y_2, z_2)$ równa jest $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

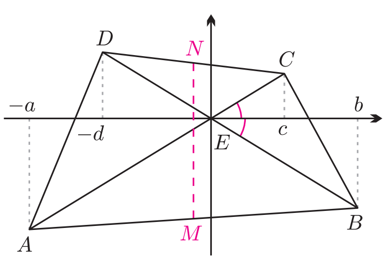
**R1.** Wprowadźmy układ współrzędnych w $\mathbb{R}^3$ tak, aby $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$, $C=(0,0,1)$ (rys. 1). Wtedy równanie płaszczyzny $ABC$ to $x+y+z=1$.

Rozważmy sferę daną równaniem $x^2+y^2+z^2=r^2$ dla takiego $r>0$, aby okrąg wpisany w trójkąt $ABC$ był przekrojem tej sfery płaszczyzną $ABC$.

Niech $P=(x,y,z)$. Wówczas $PA^2+PB^2+PC^2 = ((x-1)^2+y^2+z^2)+$ $+(x^2+(y-1)^2+z^2)+(x^2+y^2+(z-1)^2) = 3(x^2+y^2+z^2)-2(x+y+z)+3=$ $=3r^2-2+3=3r^2+1$, czyli faktycznie nie zależy od wyboru punktu $P$ z okręgu. □

**R2.** Równania opisują płaszczyznę przechodzącą przez punkty $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ oraz sferę o środku w punkcie $(0,0,0)$ i promieniu 1. Sfera ta przechodzi przez te same trzy punkty, więc przecina się z daną płaszczyzną wzdłuż okręgu przez nie wyznaczonego. Stąd układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań. □

**R3.** Równania opisują okrąg o środku $(2,1)$ i promieniu $2\sqrt{5}$ oraz okrąg o środku $(-4,-2)$ i promieniu $\sqrt{5}$. Odległość między środkami tych okręgów równa jest $\sqrt{(2+4)^2+(1+2)^2} = \sqrt{6^2+3^2} = 3\sqrt{2^2+1^2} = 3\sqrt{5}$, czyli równa sumie ich promieni. Okręgi są więc styczne i układ równań ma jedno rozwiązanie. □



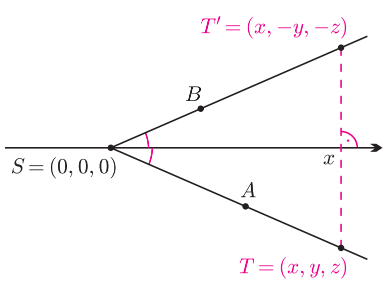

Rys. 2

**R4.** Wprowadźmy układ współrzędnych tak, aby $E=(0,0)$ oraz by dwusieczna kąta $BEC$ była zawarta w dodatniej półosi $OX$ (rys. 2). Czworokąt jest wypukły, więc pierwszymi współrzędnymi punktów $A, B, C, D$ są odpowiednio $-a, b, c, -d$ dla pewnych $a,b,c,d>0$.

Prosta $MN$ jest prostopadła do osi $OX$ wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsze współrzędne punktów $M$ i $N$ są równe, czyli gdy $\frac{1}{2}(-a+b)=\frac{1}{2}(c-d)$ $(*)$.

Odcinki $AC$ i $BD$ tworzą z poziomą osią ten sam kąt ($\frac{1}{2}\sphericalangle BEC$), więc warunek $AC=BD$ równoważny jest warunkowi, że rzuty tych odcinków na oś $OX$ są równe. Każdy z rzutów zawiera punkt $E=(0,0)$, zatem są one równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a+c=b+d$ $(**)$.

Warunki $(*)$ i $(**)$ są równoważne, co kończy dowód. □




Rys. 3. Przy symetrii względem osi $OX$ współrzędna $x$ się nie zmienia, a współrzędne $y$ i $z$ zmieniają znak.

**R5.** Wprowadźmy układ współrzędnych tak, aby wyróżniony wierzchołek $S$ czworościanu był w punkcie $(0,0,0)$, a prostopadłe dwusieczne kątów płaskich $ASB$ i $BSC$ były zawarte odpowiednio w dodatnich półosiach $OX$ i $OY$.

Rozważmy dowolny punkt $T=(x,y,z)$ z półprostej $SA^{\rightarrow}$. Jego obrazem w symetrii względem osi $OX$ jest punkt $T'=(x,-y,-z)$ na półprostej $SB^{\rightarrow}$ (rys. 3). Z kolei obrazem punktu $T'$ w symetrii względem osi $OY$ jest punkt $T''=(-x,-y,z)$ na półprostej $SC^{\rightarrow}$. Punkty $T''$ i $T$ są więc symetryczne względem osi $OZ$. Zatem, z dowolności wyboru $T$, całe półproste $SC^{\rightarrow}$ i $SA^{\rightarrow}$ są symetryczne względem $OZ$. Stąd dwusieczna kąta $CSA$ zawarta jest w osi $OZ$, co kończy dowód. □

Zadania 4 i 5 pochodzą z LXII Olimpiady Matematycznej.