Okrąg Apoloniusza

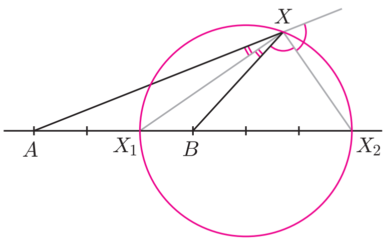
Joanna JASZUŃSKA

Gdzie na płaszczyźnie znajdują się punkty, których stosunek odległości do dwóch ustalonych punktów A i B równy jest danej dodatniej stałej k? Okazuje się, że punkty te tworzą okrąg, zwany *okręgiem Apoloniusza* (rys. 1; dla $k = 1$ okrąg zdegenerowany jest do prostej – symetralnej odcinka AB).

Ponadto dla dowolnego punktu X z okręgu Apoloniusza i spoza prostej AB spodki dwusiecznych kątów przy wierzchołku X trójkąta ABX leżą na tym okręgu.

Zachęcam do udowodnienia powyższych faktów i zastosowania ich w zadaniach.

Przyda się *twierdzenie o dwusiecznej*: w trójkącie ABX, punkt Y na prostej AB jest spodkiem dwusiecznej kąta przy wierzchołku X wtedy i tylko wtedy, gdy $XA/XB = YA/YB$.



Rys. 1. Okrąg Apoloniusza dla $k = 2$.

1. Punkty A, B, C, D leżą, w tej właśnie kolejności, na prostej l, przy czym $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 6$. Rozstrzygnij, czy istnieje taki punkt X spoza prostej l, aby $\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC = \sphericalangle CXD$.

2. Dane są dwa okręgi rozłączne zewnętrznie. Wyznacz zbiór punktów, z których okręgi te widać pod tym samym kątem.

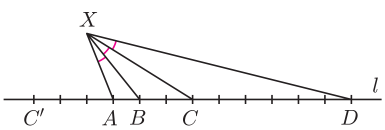
3. W przestrzeni dane są różne punkty A, B, C_0, C_1, C_2, przy czym $C_iA = 2C_iB$ dla $i = 0, 1, 2$ oraz $C_1C_2 = \frac{4}{3}AB$. Udowodnij, że kąt $C_1C_0C_2$ jest prosty i że punkty A, B, C_1, C_2 leżą na jednej płaszczyźnie.

4. Punkty A i B nie należą do płaszczyzny Π. Wyznacz zbiór wszystkich punktów $X \in \Pi$ o tej własności, że proste AX i BX tworzą z płaszczyzną Π równe kąty.

5. W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od 180° oraz zachodzi równość $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD. Udowodnij, że $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$.

6. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $AB > BC$. Na boku CD tego prostokąta skonstruuj takie punkty X i Y, aby $AX = XY = YB$.

Rozwiązania niektórych zadań

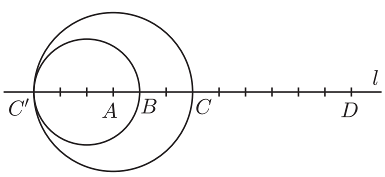


Rys. 2a

R1. Jeśli taki punkt X istnieje, to XB jest dwusieczną kąta AXC (rys. 2a), zatem z twierdzenia o dwusiecznej $XA/XC = BA/BC = 1/2$. Punkty X i B leżą więc na okręgu Apoloniusza dla punktów A, C i stałej $1/2$. Analogicznie punkty X i C leżą na okręgu Apoloniusza dla punktów B, D i stałej $1/3$.

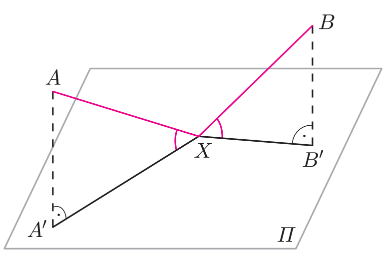
Niech punkt C' na prostej l, różny od C, spełnia warunek $C'A = AC$. Wtedy

$$\frac{C'A}{C'C} = \frac{AC}{2AC} = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{C'B}{C'D} = \frac{AC + AB}{AC + AB + BC + CD} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$



Rys. 2b

zatem punkt C' należy do obydwu powyższych okręgów. Średnicą pierwszego z nich jest więc BC', a drugiego – CC' (rys. 2b). Stąd jedynym ich wspólnym punktem jest C', czyli $X = C'$. Ale wtedy X leży na prostej l – sprzeczność. $\square$

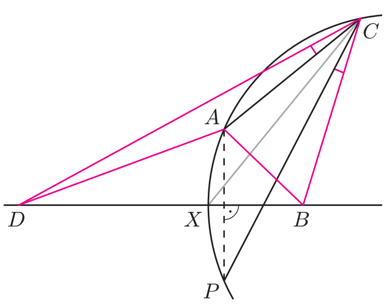


Rys. 3

R3. Ponieważ $C_iA/C_iB = 2$ dla $i = 0, 1, 2$, więc wszystkie punkty C_i leżą na sferze Apoloniusza dla punktów A, B i stałej 2 (zdefiniowanej analogicznie do okręgu). Jej średnicę wyznaczają punkty X_1, X_2 na prostej AB, spełniające warunek $X_iA/X_iB = 2$ dla $i = 1, 2$. Wówczas $X_1X_2 = \frac{1}{3}AB + AB = \frac{4}{3}AB$ (rys. 1).

Wobec tego C_1C_2 także jest średnicą rozważanej sfery. Stąd kąt $C_1C_0C_2$ jest prosty, jako wpisany oparty na średnicy. Proste AB i C_1C_2 przecinają się (w środku sfery), więc punkty A, B, C_1, C_2 leżą na jednej płaszczyźnie. $\square$

R4. Niech A', B' oznaczają odpowiednio rzuty punktów A, B na płaszczyznę Π (rys. 3). Dla punktu $X \in \Pi$, różnego od A' i B', równość $\sphericalangle AXA' = \sphericalangle BXB'$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty prostokątne AXA' i BXB' są podobne. Równoważnie, $XA'/XB' = AA'/BB'$. Jeśli $A' \neq B'$, to punkty X o żądanej własności tworzą okrąg Apoloniusza dla punktów A', B' i stałej AA'/BB'. Jakie jest rozwiązanie, gdy $A' = B'$? Czy możliwe, by $X = A'$? $\square$



Rys. 4

R5. Punkty A i C leżą na okręgu Apoloniusza dla punktów B, D i stałej $AB/AD = CB/CD$. Z symetrii względem prostej BD punkt P też na nim leży (rys. 4).

Łuki $\overset{\frown}{PX}$ i $\overset{\frown}{AX}$ są równe, więc CX jest dwusieczną kąta PCA. Jednocześnie CX jest też dwusieczną kąta BCD (własność z początku artykułu, rys. 1), stąd

$$\sphericalangle PCB = \sphericalangle XCB - \sphericalangle XCP = \sphericalangle XCD - \sphericalangle XCA = \sphericalangle ACD. \ \square$$

Wskazówka 6. Warto rozważyć okrąg Apoloniusza dla punktu A, środka boku CD i stałej 2.

Zadanie 4 pochodzi z XXXVI Olimpiady Matematycznej, zadanie 5 z XXIII OM, a zadanie 6 z LVII OM.