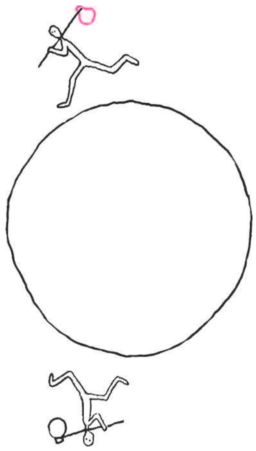
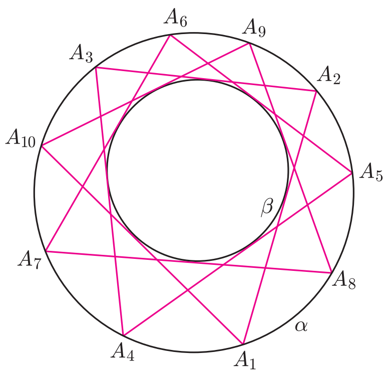


Wędrówki po okręgu

Urszula SWIANIEWICZ

Matematycy od wielu lat zajmują się wędrówką po okręgu. Jednym z najbardziej znanych przykładów jest chyba skakanie po nim w określonym kierunku tak, by między kolejnymi punktami, w których się znajdziemy, była określona odległość a (mierzona wzdłuż łuku). Naturalne staje się wówczas pytanie, czy skacząc tak po okręgu, wrócimy kiedykolwiek do punktu wyjścia (widać, że rozwiązanie problemu nie zależy od punktu startowego)? Odpowiedź nasuwa się prędko – powrót nastąpi tylko wówczas, gdy stosunek długości okręgu do liczby a jest liczbą wymierną. Spróbujmy tym razem powędrować w inny sposób, określony geometrycznie.



Rys. 1

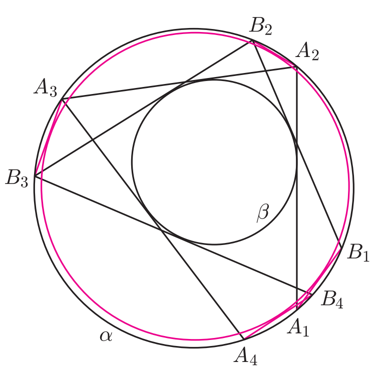
Oznaczmy nasz okrąg przez α, a w jego wnętrzu umieśćmy drugi (niekoniecznie współśrodkowy) okrąg β. Wędrówka będzie wyglądała następująco: z punktu A_1 na okręgu α prowadzimy styczną do okręgu β. Niech punkt A_2 będzie drugim (różnym od A_1) punktem przecięcia stycznej z okręgiem α – tam właśnie powędrujemy. Kolejne kroki wyglądają analogicznie – z punktu A_n wędrujemy po stycznej do okręgu β aż do punktu A_{n+1} leżącego na okręgu α (jak na rysunku 1).

Przy tak określonej wędrówce również pojawia się niejedno pytanie. Czy wrócimy kiedyś do punktu wyjścia, tak jak na rysunku? I jak wygląda na α zbiór punktów, do których uda nam się powrócić? Odpowiedzi okazują się niezwykle zaskakujące – to, czy uda nam się wrócić do punktu wyjścia, nie zależy od wyboru tego punktu! Jeśli wędrując z pewnego miejsca, zakończymy wędrówkę, to zaczynając z dowolnego innego miejsca, również nam się to uda, co więcej – nastąpi to po tej samej liczbie „kroków”, a w czasie wędrówki tyle samo razy „obejdziemy” okrąg. Mówi o tym szczególny przypadek tzw. Wielkiego Twierdzenia Ponceleta, który sformułowany formalnie brzmi następująco:

Wielkie Twierdzenie Ponceleta różni się od dowodzonego tu twierdzenia tym, że α i β mogą być dowolnymi, niekoniecznie tego samego rodzaju stożkowymi (elipsami, parabolami, hiperbolami), nie zakłada się niczego o ich wzajemnym położeniu oraz rozszerza się styczność także na asymptotyczność.

Twierdzenie. *Dany jest okrąg α oraz okrąg β, leżący w jego wnętrzu. Niech A_1 będzie dowolnym punktem na okręgu α, zaś $A_2, A_3, \ldots$ takimi punktami na α, że dla każdego i prosta A_iA_{i+1} jest styczna do okręgu β oraz $A_i \neq A_{i+2}$. Analogicznie określmy punkty B_i. Wówczas, jeśli dla pewnego n zachodzi $A_n = A_1$, to również $B_n = B_1$.*

Choć twierdzenie to można udowodnić dzięki metodom geometrii rzutowej, istnieje również niezwykle pomysłowy dowód wykorzystujący jedynie proste fakty geometryczne. Rozwiązania wielu problemów geometrii uzyskuje się przez dorysowanie na rysunku pewnej prostej lub odcinka. Nam przyda się okrąg (można zobaczyć go na rysunku 2), choć fakt jego istnienia (czyli styczności wszystkich odcinków A_iB_i do jednego okręgu) nie jest wcale oczywisty.



Rys. 2

Dowód przeprowadzimy przy założeniu, że B_1 leży po drugiej stronie prostej A_1A_2 niż okrąg β oraz że B_2 leży po drugiej stronie prostej A_2A_3 niż okrąg β. Czytelnik Wnikliwy bez trudu wykaże, że wynika z tego twierdzenie w całej ogólności. Nie będziemy również zajmować się przypadkiem, gdy okręgi α i β są współśrodkowe – wówczas twierdzenie jest oczywiste.

Przyjrzyjmy się punktom A_1, A_2, B_1, B_2. Niech C_1 i D_1 będą odpowiednio punktami styczności okręgu β z prostymi A_1A_2 i B_1B_2, zaś K i L niech będą punktami przecięcia prostej C_1D_1 odpowiednio z odcinkami A_1B_1 i A_2B_2 (jak na rysunku 3). Mamy wówczas

$$\sphericalangle KC_1A_1 = \sphericalangle A_2C_1D_1 = \sphericalangle B_1D_1C_1 = \sphericalangle LD_1B_2$$

oraz $\sphericalangle B_1A_1A_2 = \sphericalangle B_1B_2A_2$. Stąd $\sphericalangle B_1KL = \sphericalangle A_2LK$ (są to kąty zewnętrzne w trójkątach KC_1A_1 i LD_1B_2). W takim razie istnieje okrąg ω_1 styczny do prostych A_1B_1 i A_2B_2 odpowiednio w punktach K i L. Stosunek pól trójkątów $A_2D_1C_1$ i $B_2D_1C_1$ jest równy stosunkowi wysokości opuszczonych na wspólną podstawę D_1C_1, a więc również stosunkowi odcinków A_2L i B_2L. Z tego faktu i z otrzymanych równości kątów wynika, że

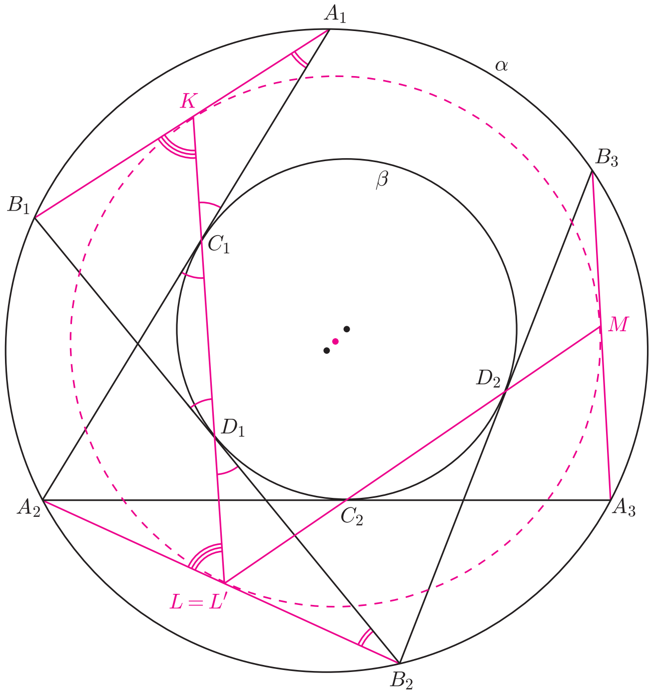
$$\frac{A_2L}{B_2L} = \frac{[A_2D_1C_1]}{[B_2D_1C_1]} =$$

$$= \frac{A_2C_1 \cdot C_1D_1 \cdot \sin\sphericalangle A_2C_1D_1}{B_2D_1 \cdot C_1D_1 \cdot \sin\sphericalangle B_2D_1C_1} = \frac{A_2C_1}{B_2D_1},$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Stąd i z podobieństwa trójkątów LB_2D_1 i KA_1C_1 oraz A_2LC_1 i B_1KD_1 mamy

$$\frac{A_1K}{A_1C_1} = \frac{B_2L}{B_2D_1} = \frac{A_2L}{A_2C_1} = \frac{B_1K}{B_1D_1}.$$

Z poniższego lematu (którego dowód Czytelnik Pracowity może przeprowadzić z pomocą wskazówek z marginesu) otrzymujemy wniosek, że środki okręgów α, β i ω_1 są współliniowe.



Rys. 3

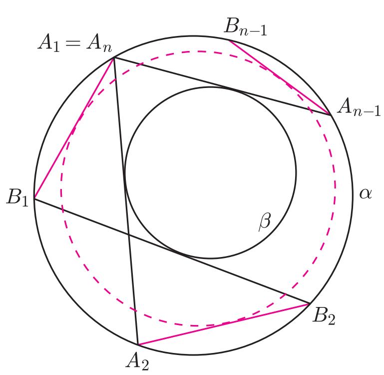
Dowód lematu najłatwiej przeprowadzić metodami analitycznymi – wprowadzając współrzędne punktu P oraz środków okręgów o_1 i o_2 oraz długości promieni o_1 i o_2. Wyrażając a_P i b_P przez te wartości, łatwo przekształcić zależność $\frac{a_P}{b_P} = \lambda$ do równania na współrzędne punktu P, które okazuje się równaniem okręgu. Współliniowość środków trzech okręgów z lematu wynika z symetrii warunku na punkt P względem tej prostej.

Lemat. *Dane są dwa okręgi o_1 i o_2 oraz liczba $\lambda \neq 1$. Dla dowolnego punktu P leżącego na zewnątrz okręgów a_P, b_P oznaczają odległości punktu P od punktów styczności prostych przechodzących przez P stycznych odpowiednio do okręgów o_1 i o_2. Wówczas zbiór punktów P, dla których $\frac{a_P}{b_P} = \lambda$, jest zbiorem pustym lub okręgiem o środku leżącym na prostej łączącej środki o_1 i o_2.*

Niech C_2 i D_2 będą punktami styczności okręgu β odpowiednio z prostymi A_2A_3 i B_2B_3, zaś L' i M – punktami przecięcia prostej C_2D_2 odpowiednio z odcinkami A_2B_2 i A_3B_3. Powtarzając wcześniejsze rozumowanie, stwierdzamy, że istnieje okrąg ω_2 styczny do A_2B_2 i A_3B_3 w punktach L' i M, a jego środek leży na prostej przechodzącej przez środki okręgów α i β. Zauważmy, że $L = L'$ – punkty te leżą na odcinku A_2B_2 oraz

$$\frac{A_2L}{B_2L} = \frac{A_2C_1}{B_2D_1} = \frac{A_2C_2}{B_2D_2} = \frac{A_2L'}{B_2L'}.$$

Wynika z tego, że okręgi ω_1 i ω_2 są styczne do prostej A_2B_2 w tym samym punkcie, a ich środki leżą na pewnej ustalonej prostej k (przechodzącej przez środki okręgów α i β). Jeśli $A_2B_2 \not\perp k$, mamy $\omega_1 = \omega_2$. Ten sam wniosek możemy otrzymać, jeśli $A_2B_2 \perp k$, wówczas bowiem punkty A_1 i B_1 są symetryczne względem prostej k odpowiednio do punktów B_3 i A_3, więc okręgi ω_1 i ω_2 są symetryczne względem prostej k, a ich środki leżą na tej prostej. Czytelnik Spostrzegawczy dostrzeże, że pokazaliśmy w ten sposób styczność prostej A_iB_i do okręgu ω_1 dla dowolnego i.



Rys. 4

Przyjrzyjmy się ostatniemu rysunkowi, by dokończyć nasz dowód. Odcinki A_1B_1 i A_2B_2 są rozłączne i styczne do okręgu ω_1, stąd A_1A_2 przecina ten okrąg. Skoro $A_n = A_1$, zachodzi również $A_{n+1} = A_2$. Ponieważ punkty A_i oraz B_i leżą na okręgu α na zmianę (punkt B_i leży po przeciwnej stronie łuku A_iA_{i+1} niż okrąg β), to B_1 i B_n leżą na tym samym łuku A_1A_2, a więc po tej samej stronie prostej A_1A_2. Proste A_1B_1 i $A_nB_n = A_1B_n$ są styczne do okręgu ω_1, a zatem $B_1 = B_n$.

Tak oto znaleźliśmy odpowiedź na pytanie o zbiór punktów, dla których wędrówka po okręgu α zakończy się po skończonej liczbie kroków – jest to zbiór pusty lub cały okrąg. Jak jednak rozpoznać, z którą z tych dwóch sytuacji mamy w danym przypadku do czynienia? Poszukiwanie odpowiedzi na to i wiele innych pytań pozostawiamy Czytelnikom.