Dowody V postulatu Euklidesa

Marek KORDOS

Notka dla uspokojenia Czytelnika Nerwowego. Oczywiście, V postulatu Euklidesa nie da się dowieść na podstawie poprzednich czterech. Niemniej jednak praktycznie każdy znaczący matematyk od V do XIX wieku taki dowód przeprowadził i dopiero jego koledzy wskazywali, w którym miejscu rozumowania użył przesłanki z czterech początkowych postulatów niewynikającej. W ten sposób rosła liczba zdań równoważnych V postulatowi, czy – jak kto woli – zdań, które są nieprawdziwe w geometrii nieeuklidesowej powstającej przez zaprzeczenie V postulatu. Niżej przedstawię trzy takie dowody, nie wskazując nieuprawnionych przesłanek. Zostaną one wskazane w następnym numerze *Delty*.

Najgłupiej postawiony problem matematyki

Oto pięć postulatów, z których Euklides w *Elementach* wyprowadził całą geometrię i arytmetykę.

I. *Od dowolnego punktu do dowolnego innego można poprowadzić prostą.*
II. *Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.*
III. *Z dowolnego środka dowolnym promieniem można opisać okrąg.*
IV. *Wszystkie kąty proste są równe.*
V. *Jeśli suma kątów wewnętrznych jednostronnych, utworzonych przez dwie proste przecięte trzecią, jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to proste te po przedłużeniu przetną się i to z tej właśnie strony.*

Jak łatwo zauważyć, liczba słów użytych do sformułowania początkowych czterech z nich (27) jest mniejsza od liczby słów potrzebnych do sformułowania piątego (30) – po grecku było podobnie, a przecież postulaty miały wyrażać treści proste i oczywiste.

Zauważył to jeden z epigonów matematyki greckiej, żyjący w czasach słusznie przez niego ocenianych jako lata wszelkiego upadku, Proklos (410–485). Oto jego wnioski i wynikający z nich program.

Nie jest możliwe, aby uczony tej miary co Euklides godził się na obecność tak długiego postulatu w aksjomatyce – obecność postulatu wzięła się z pospiesznego kończenia przez niego Elementów, *tak aby zdążyć przed nadejściem słusznie oczekiwanej rychłej śmierci; my zatem – czcząc jego pamięć – powinniśmy ten postulat usunąć lub co najmniej znacznie uprościć.*

Choć informację o myślach i stanie zdrowia Euklidesa Proklos wyssał sobie z palca, a ocena treści postulatów poprzez zliczanie słów jest co najmniej cudaczna, to – w co trudno uwierzyć – matematycy uznali program Proklosa za wyzwanie i faktycznie chyba wszyscy próbowali go zrealizować. Spróbujmy i my.

Czym wolno się posługiwać, dowodząc V postulatu?

Dokładniej: jak rozumiano początkowe cztery postulaty (bo są one – jak na dzisiejsze wymagania – sformułowane dość enigmatycznie)? Otóż w tej kwestii panowała całkowita jednomyślność. Można to ująć w trzech punktach.

- *Wolno bez ograniczeń wykonywać wszystkie konstrukcje cyrklem i linijką.*

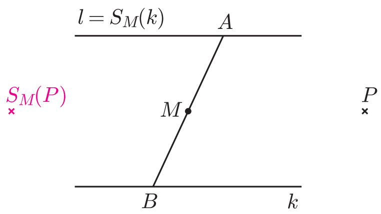
oraz przyjmuje się jako dane następujące fakty:

- *Na płaszczyźnie prosta, przecinająca jeden z boków trójkąta i nieprzechodząca przez żaden z wierzchołków, przecina jeszcze jeden bok* (nazywa się to aksjomatem Pascha).
- *Symetrie zachowują wszystkie miary i relacje geometryczne.*

Nazwa *aksjomat Pascha* bierze się stąd, iż fakt korzystania z takiej przesłanki przez wszystkich geometrów wykrył dopiero w 1882 roku niemiecki matematyk Moritz Pasch (1843–1930).

Geometria oparta na początkowych czterech postulatach Euklidesa, a właściwie na podanym tutaj rozumieniu ich treści, nazywana jest **geometrią absolutną**.

Już Proklos zauważył, że
przez punkt A poza prostą k można na płaszczyźnie poprowadzić prostą l, rozłączną z k.



Rys. 1

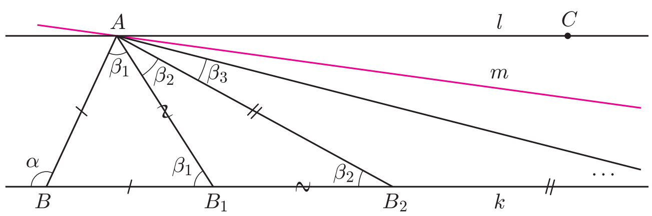
Istotnie, obierzmy na k jakiś punkt B i niech środkiem odcinka AB będzie M. Jako l weźmy obraz symetryczny k względem M (rys. 1). Gdyby proste k i l przecinały się w jakimś punkcie P, to – ponieważ narysowana figura ma środek symetrii – również $S_M(P)$ byłby punktem wspólnym k i l, a zatem dwie różne proste przecinałyby się w dwóch różnych punktach, co jest niemożliwe.

Wynika stąd natychmiast, że V postulat w aksjomatyce geometrii euklidesowej można zastąpić przez

John Playfair (1748–1819), matematyk angielski, doprowadził do tego, że jego postulat powszechnie jest uważany za V postulat Euklidesa.

Postulat Playfaira: *Na płaszczyźnie przez każdy punkt poza prostą przechodzi co najwyżej jedna prosta z nią rozłączna.*

Nieco trudu trzeba sobie zadać, by wykazać, że podobną rolę pełni
Postulat sumy kątów. *Suma kątów w trójkącie jest równa π.*

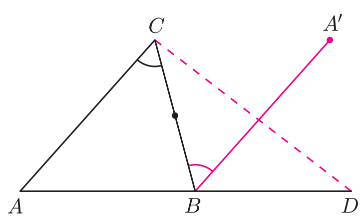


Rys. 2

Mianowicie do punktów A i B z rysunku 1 dołączmy jeszcze punkt C leżący na l i dowolną prostą m przechodzącą przez A, biegnącą poniżej punktu C (rys. 2). Tworzymy na k ciąg punktów, które spełniają warunek $AB = BB_1$, $AB_i = B_iB_{i+1}$. Jak łatwo zauważyć (oznaczenia z rysunku), $\beta_i = \alpha/2^i$ (tu wykorzystujemy postulat sumy kątów – prawda?). Ponadto $\sphericalangle BAB_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$, co dla $n \to \infty$ dąży do α.

Prosta m tworzy z odcinkiem AB kąt mniejszy od α (czemu?), a więc dla pewnego N mieści się w trójkącie BAB_N i wobec tego przecina k.

Jeśli więc udowodnimy w geometrii absolutnej postulat Playfaira lub postulat sumy kątów, to udowodnimy tym samym V postulat z początkowych czterech.

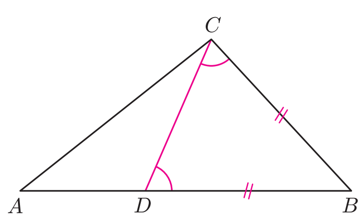


Rys. 3

Potrzebne nam w tym celu będą jeszcze cztery twierdzenia geometrii absolutnej.

- *Kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od nieprzyległego do niego kąta wewnętrznego.*

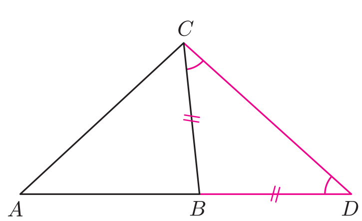
Dokonując symetrii wierzchołka A względem środka boku BC, otrzymujemy punkt A'. W oznaczeniach z rysunku 3 mamy $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBA' < \sphericalangle CBD$ – nierówność zachodzi na mocy aksjomatu Pascha (trójkąt ACD i prosta BA').



Rys. 4

- *W trójkącie naprzeciw dłuższego boku jest większy kąt.*

Jeśli $AB > BC$, to na odcinku AB jest taki punkt D, że $BD = BC$. Wówczas (rys. 4) $\sphericalangle ACB > \sphericalangle DCB = \sphericalangle CDB > \sphericalangle BAC$ – ostatnia nierówność wynika z poprzedniego twierdzenia.

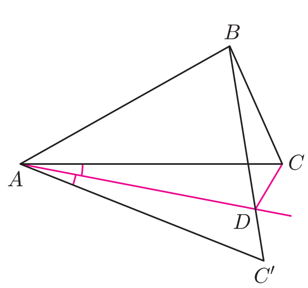


Rys. 5

- *Zachodzi nierówność trójkąta.*

Aby dowieść, że $AB + BC > AC$, odłóżmy BC na przedłużeniu AB (rys. 5), otrzymując D. Mamy $\sphericalangle ACD > \sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC$. Stąd na mocy poprzedniego twierdzenia otrzymujemy $AB + BC = AD > AC$.

- *Jeśli dwa trójkąty mają parę boków odpowiednio równych, to trzeci bok jest dłuższy w tym trójkącie, w którym kąt między nimi jest większy.*

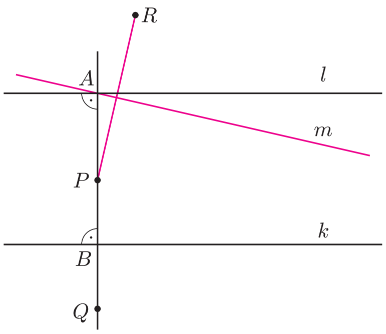


Rys. 6

Takie dwa trójkąty możemy przemieścić w ten sposób, by jedna para równych boków pokryła się. Niech więc tymi trójkątami będą ABC i ABC' i niech $AC = AC'$. Załóżmy też, że $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BAC'$. Mamy wykazać, że $BC < BC'$. Narysujmy dwusieczną kąta CAC' i oznaczmy jej punkt przecięcia z BC' przez D (rys. 6). Mamy (symetria) $DC' = DC$. Zatem $BC' = BD + DC' = BD + DC > BC$ z nierówności trójkąta.

Warsztat został skompletowany, przystępujemy do dowodów V postulatu. Każdy z nich przez pewien czas był uznawany za poprawny.

Farkas Bolyai (1775–1856), matematyk węgierski, ojciec jednego z odkrywców geometrii nieeuklidesowej.



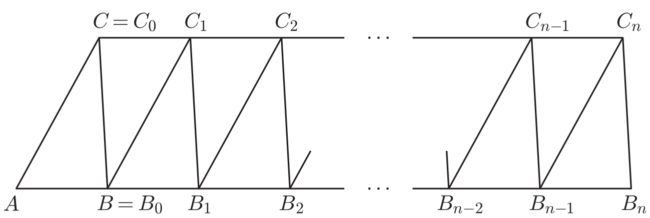
Rys. 7

Dowód postulatu Playfaira – Farkas Bolyai

Oznaczmy przez B rzut nieleżącego na prostej k punktu A na tę prostą (rys. 7). Prosta l, przechodząca przez A i prostopadła do AB, jest rozłączna z k (dlaczego?). Mamy wykazać, że każda inna prosta m przechodząca przez A przecina prostą k. Obierzmy na AB dowolnie punkt P i odbijmy go symetrycznie względem k i względem m, otrzymując, odpowiednio, Q i R. Punkt Q leży na prostej AB, a ponieważ $l \neq m$, więc R na prostej AB nie leży. Punkty P, Q, R tworzą zatem trójkąt, a proste k i m są symetralnymi dwóch jego boków, a więc obie przechodzą przez środek okręgu opisanego na trójkącie PQR, czyli przecinają się.

Dowód postulatu sumy kątów – Adrien-Marie Legendre

Z sumą kątów związane jest pojęcie *defektu trójkąta*; dla trójkąta ABC jest to liczba $\Delta(ABC) := \pi - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB)$. Postulat sumy kątów orzeka, że defekty wszystkich trójkątów są równe 0. Wystarczy więc udowodnić, że defekt nie może być dodatni ani ujemny.



Rys. 8

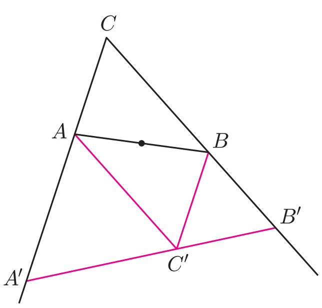
Przypuśćmy, że defekt trójkąta ABC jest ujemny. Ustawmy wobec tego jego kopie na prostej AB, tak jak na rysunku 8, oraz połączmy odcinkami kolejne kopie wierzchołka C. Zauważmy, że $C_0C_1 < AB$; wynika to z faktu, iż $\sphericalangle ACB > \sphericalangle C_0BC_1$, a to dlatego, że $\sphericalangle ABC_0 + \sphericalangle C_0BC_1 + \sphericalangle C_1BB_1 = \pi$, natomiast założyliśmy, że $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle CAB > \pi$, przy czym $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1BB_1$.

Adrien-Marie Legendre (1752–1833), matematyk francuski, także autor podręczników szkolnych; przytoczony dowód władze oświatowe Francji poleciły umieścić w jednym z tych podręczników – jego znajomość obowiązywała uczniów przez ponad 20 lat.

Oznaczmy $\varepsilon := AB - C_0C_1$ (jest to liczba dodatnia) i obliczmy długość łamanej $AC_0C_1 \dots C_nB_n$:

$$AC + n \cdot C_0C_1 + CB = AC + CB + n \cdot AB - n \cdot \varepsilon = \\ = (AC + CB - AB - n \cdot \varepsilon) + AB_n.$$

Nietrudno zauważyć, że dla dużych n wartość nawiasu będzie ujemna, a to by znaczyło, że łamana jest krótsza od odcinka – sprzeczność z nierównością trójkąta.



Rys. 9

Zatem trójkątów z ujemnym defektem nie ma. Przypuśćmy, że jest choćby jeden, ABC, który ma dodatni defekt δ. Odbijmy go symetrycznie względem środka odcinka AB i przez obraz C' punktu C poprowadźmy prostą przecinającą przedłużenia boków CA i CB w punktach A' i B' (rys. 9). Zauważmy, że defekt trójkąta $A'B'C$ jest sumą defektów czterech trójkątów, z jakich się składa – suma ta to 4π, od czego trzeba odjąć sumy kątów wszystkich trójkątów. Ale w punktach A, B i C' kąty te składają się na π, pozostaje więc tylko jedno π minus suma kątów trójkąta $A'B'C$. Na mocy pierwszej części dowodu widzimy, że

$$\Delta(A'B'C) = \Delta(ABC) + \Delta(ABC') + \Delta(A'AC') + \Delta(C'BB') \geqslant \\ \geqslant \Delta(ABC) + \Delta(ABC') = 2 \cdot \delta,$$

bo przy symetrii defekt się nie zmienia. Zatem taka operacja zwiększa defekt trójkąta co najmniej dwukrotnie. Można więc za jej pomocą uzyskać defekt większy niż π, co by znaczyło, że trójkąt ma ujemną sumę kątów – sprzeczność.

Girolamo Saccheri (1667–1733), matematyk włoski – jego prace zapoczątkowały podejrzenia, iż, być może, istnieją inne geometrie niż euklidesowa.

Dowód nie wprost – Girolamo Saccheri

Tym razem rozumowanie jest następujące – przypuśćmy, że postulat sumy kątów jest nieprawdziwy. Wtedy – posługując się sytuacją z rysunku 2, uzyskamy rezultat, iż $\sphericalangle BAB_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ dla $n \to \infty$ dąży do kąta $\varphi < \alpha$. Wówczas prosta m nakreślona tak, by tworzyła z l kąt $\alpha - \varphi$, będzie asymptotą prostej k. A przecież proste nie mogą być asymptotyczne.

Tym, którzy chcieliby poznać intelektualne i psychiczne męki matematyków przez ponad tysiąc lat bezskutecznie dowodzących V postulatu, polecam wątek Velasqueza w szkatułkowej powieści Jana Potockiego *Rękopis znaleziony w Saragossie*.

Tyle dowodów – w następnym numerze ci, którzy nie dostrzegli w nich nieuprawnionych przesłanek, będą mogli je znaleźć.