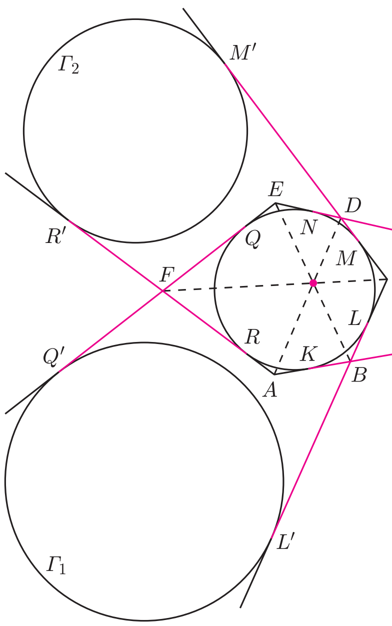
deltoid 40

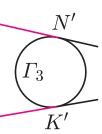
Twierdzenie Brianchona

Joanna JASZUŃSKA

Poprzedni *deltoid* poświęcony był osiom potęgowym, między innymi twierdzeniu, które w skrócie brzmi tak: *osie potęgowe trzech okręgów przecinają się w jednym punkcie.* Ciekawym jego zastosowaniem jest dowód twierdzenia Brianchona.

Twierdzenie Brianchona. *Sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu. Wówczas przekątne AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie.*





Rys. 1. Kolorowe odcinki są długości d.

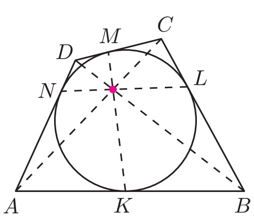
Dowód. Oznaczmy okrąg przez Γ, a jego punkty styczności do boków sześciokąta jak na rysunku 1. Ustalmy pewną długość d. Niech punkt K' leży na półprostej $AK^{\rightarrow}$ tak, by $AK' = AK + d$; stąd $KK' = d$. Analogicznie zdefiniujmy punkty L', M', N', Q', R' odpowiednio na półprostych $CL^{\rightarrow}, CM^{\rightarrow}, EN^{\rightarrow}, EQ^{\rightarrow}, AR^{\rightarrow}$ (można wybrać d tak, by $K' \neq N'$, $L' \neq Q'$, $M' \neq R'$).

Istnieje okrąg Γ_1 styczny do prostych CL, EQ odpowiednio w punktach L', Q' – jest on obrazem Γ w jednokładności względem punktu przecięcia prostych CL, EQ lub przesunięciem Γ o d, jeśli proste te są równoległe. Analogicznie istnieje okrąg Γ_2 styczny do prostych CM, AR w punktach M', R', oraz Γ_3, styczny do AK, EN w K', N'.

Ponieważ $CL = CM$ oraz $LL' = MM' = d$, więc $\mathrm{Pot}(C, \Gamma_1) = CL'^2 = (CL + LL')^2 = (CM + MM')^2 = CM'^2 = \mathrm{Pot}(C, \Gamma_2)$. Podobnie ponieważ $FQ = FR$ oraz $QQ' = RR' = d$, otrzymujemy $\mathrm{Pot}(F, \Gamma_1) = \mathrm{Pot}(F, \Gamma_2)$. Prosta CF jest więc osią potęgową okręgów Γ_1 i Γ_2. Analogicznie prosta AD jest osią potęgową Γ_2 i Γ_3 oraz BE jest osią potęgową Γ_1 i Γ_3. Wobec tego proste AD, BE i CF, jako osie potęgowe trzech okręgów, przecinają się w jednym punkcie. □

Uwaga. Twierdzenie Brianchona jest też prawdziwe dla sześciokątów zdegenerowanych, a także – ogólniej – dla sześciokątów opisanych na elipsach.

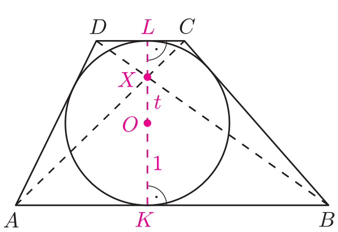
1. Okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N (rys. 2). Udowodnij, że proste AC, BD, KM, LN przecinają się w jednym punkcie.



Rys. 2

2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach K, L, M. Wykaż, że proste AL, BM, CK przecinają się w jednym punkcie.

3. Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu o środku O i promieniu 1. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie X, przy czym $XO = t$. Wyznacz stosunek $AB : CD$ długości podstaw tego trapezu, jeśli $AB \geqslant CD$.



Rys. 3

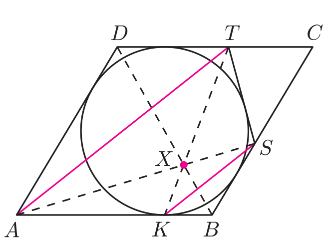
4. Okrąg wpisany w romb $ABCD$ jest styczny do boku AB w punkcie K. Styczna do tego okręgu przecina boki BC i CD odpowiednio w punktach S i T. Wykaż, że $AT \parallel KS$.

Rozwiązania niektórych zadań

R1. Z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanego sześciokąta $AKBCMD$, proste AC, BD i KM przecinają się w jednym punkcie. Z kolei z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanego sześciokąta $ABLCDN$ wynika, że przez punkt przecięcia prostych AC, BD przechodzi także prosta LN, co kończy dowód. □

R3. Oznaczmy przez K, L odpowiednio punkty styczności podstaw AB, CD z okręgiem (rys. 3). Wtedy $KL \perp AB$ oraz KL przechodzi przez punkt O. Z twierdzenia Brianchona dla czworokąta, KL przechodzi też przez punkt X. Trójkąty ABX i CDX są podobne, więc $XK \geqslant XL$ oraz

$$AB : CD = XK : XL = (1 + t) : (1 - t). \ \square$$



Rys. 4

R4. Z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanego sześciokąta $AKBSTD$, proste AS, KT, BD przecinają się w jednym punkcie X (rys. 4). Z twierdzenia Talesa ponieważ $AD \parallel BS$ oraz $DT \parallel AB$, więc $AX/XS = DX/XB = TX/XK$. Stąd i z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $AT \parallel KS$. □