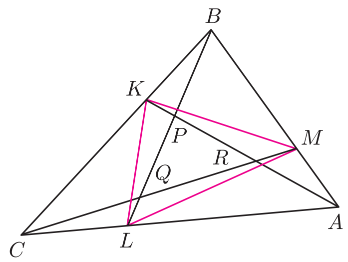
Co mogą nam dać ciężary i wypory?

Marek KORDOS

W *Delcie* 6/2011 Jerzy Zabczyk przytoczył anegdotę o Feynmanie w związku z pewnym geometrycznym zadaniem efektownie umieszczonym przez Hugona Steinhausa w *Kalejdoskopie matematycznym* (o czym Feynman nie wiedział) i zaproponował Czytelnikom atrakcyjne zadania.



Rys. 1

Warto może uzupełnić tę historię opowieścią o ogólniejszym problemie zawartym w wydanej w 1896 roku pracy E.J. Routha:

czy można obliczyć, jaką część pola trójkąta ABC stanowi pole trójkąta KLM, a jaką pole trójkąta PQR (patrz rys. 1), *gdy wiemy, że*

$$\frac{BK}{KC}=\lambda,\qquad \frac{CL}{LA}=\mu,\qquad \frac{AM}{MB}=\nu?$$

Jak można się domyślić, odpowiedź jest pozytywna. Konkretnie:

$$\Delta_{KLM}=\frac{\lambda\mu\nu+1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}\cdot\Delta_{ABC},$$

$$\Delta_{PQR}=\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(\lambda\mu+\mu+1)(\mu\nu+\nu+1)(\nu\lambda+\lambda+1)}\cdot\Delta_{ABC},$$

gdzie Δ_{XYZ} oznacza pole trójkąta XYZ.

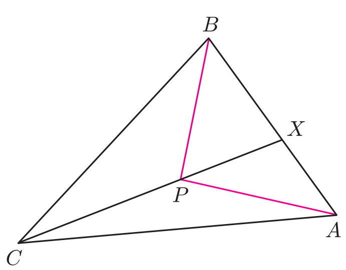
Najbardziej elegancki dowód prowadzi przez nowe pojęcie: *współrzędne barycentryczne*, znacznie zresztą ważniejsze od twierdzenia Routha. Wywodzi się ono z fizyki (Feynman by się ucieszył). Ale po kolei.

Środek ciężkości

Zastanówmy się, jakie ciężary należy umieścić w wierzchołkach (nieważkiego) trójkąta, aby jego środek ciężkości znalazł się we wskazanym punkcie jego wnętrza.

Może lepiej zacząć od prostszego pytania: jakie ciężary m_A i m_B należy umieścić w końcach (nieważkiego) odcinka AB, aby jego środek ciężkości znalazł się we wskazanym punkcie X tego odcinka. Sprawa prosta – znamy ją z lekcji fizyki (ramię razy siła):

(1) $$m_A\cdot AX=m_B\cdot XB,\quad\text{czyli}\quad \frac{m_A}{m_B}=\frac{XB}{AX}.$$



Rys. 2

Jeśli zatem mamy w wierzchołkach trójkąta ABC umieszczone, odpowiednio, ciężary m_A, m_B i m_C, to możemy pierwsze dwa z nich zastąpić ciężarem m_A+m_B umieszczonym w opisanym przez (1) punkcie X, a następnie znaleźć środek ciężkości dla tak obciążonego odcinka CX – będzie to zgodnie z (1) punkt P, spełniający zależność

(2) $$\frac{m_C}{m_A+m_B}=\frac{XP}{PC}.$$

Mając więc dane ciężary umieszczone w punktach A, B, C, możemy znaleźć punkt P i odwrotnie: mając punkt P leżący wewnątrz trójkąta ABC, możemy zgodnie z (1) i (2) tak dobrać ciężary, jakie należy umieścić w A, B i C, aby w P był ich środek ciężkości.

Wniosek 1 (spodziewany). *Jeśli trójki (m_A,m_B,m_C) i (m'_A,m'_B,m'_C) są proporcjonalne, to wyznaczają ten sam środek ciężkości.*

Ale jest też (uzasadniający umieszczenie na rysunku 2 niepotrzebnych dotąd odcinków AP i BP)

Wniosek 2 (niespodziewany): $m_A:m_B:m_C=\Delta_{BCP}:\Delta_{CAP}:\Delta_{ABP}$.

Rzeczywiście, mamy bowiem

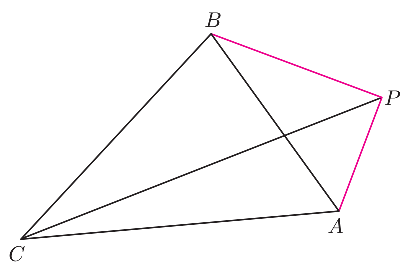
$$\frac{m_A}{m_B}=\frac{XB}{AX}=\frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{AXC}}=\frac{\Delta_{BPX}}{\Delta_{AXP}}=\frac{\Delta_{BCX}-\Delta_{BPX}}{\Delta_{AXC}-\Delta_{AXP}}=\frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{APC}}=\frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{CAP}}.$$

Równość pozostałych stosunków uzasadniamy analogicznie.

Może kogoś zastanowić dziwna kolejność wymieniania wierzchołków trójkątów. Jest ona jednak przemyślana. A bierze się stąd, aby napisane zależności nie zmieniły się, gdy dopuścimy ciężary ujemne.

Wypór

Już Archimedes wiedział, że efektywna siła ciężkości może działać zarówno w dół, jak i do góry. Tę drugą sytuację obserwujemy np. przy wznoszeniu się balonu. Archimedes (zapewne) balonów nie widział, ale miał do czynienia z cięższymi od wody statkami, które mimo tego unoszą się na jej powierzchni, i jest autorem znanego prawa, które mówi właśnie o ujemnych ciężarach, czyli o wyporze (dla XIX-wiecznych pensjonarek ozdobiono je widokiem wyskakującego z wanny nagiego mężczyzny).

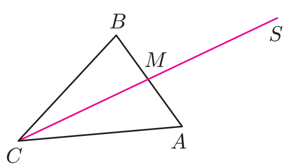


Rys. 3

O ile ograniczenie się do dodatnich ciężarów pozwalało utożsamiać z obciążeniami wierzchołków trójkąta ABC punkty jego wnętrza (i brzegu), to dopuszczenie ciężarów ujemnych pozwala przez obciążanie tych wierzchołków otrzymać środek ciężkości w dowolnym punkcie płaszczyzny trójkąta ABC.

Należy tylko zamiast odcinków rozpatrywać wektory, a zamiast trójkątów – trójkąty zorientowane, czyli takie, których pola różnią się znakami, gdy wierzchołki obiegane są w innej (cyklicznej) kolejności (bo są tylko dwie możliwości – prawda?). Wszystkie wzory zostały wyżej napisane tak, aby ta zmiana nie psuła ich poprawności (dla wprawy proszę prześledzić dowód Wniosku 2 w sytuacji z rysunku 3).

Gdzie jest środek ciężkości S, gdy $m_A = m_B = 1$, $m_C = -1$?



Dla A i B środek ciężkości (z ciężarem 2) to M – środek odcinka AB. Zgodnie z (1) mamy

$$\frac{-1}{2} = \frac{m_C}{m_M} = \frac{\overrightarrow{MS}}{\overrightarrow{SC}}, \text{ czyli } \overrightarrow{SC} = -2\overrightarrow{MS},$$

a więc M jest również środkiem CS, innymi słowy $ACBS$ jest równoległobokiem.

Czytelnik Bystry dostrzeże, że znajdowanie środka ciężkości dla dwóch punktów z ciężarami tego samego znaku odpowiada dźwigni dwustronnej, a z ciężarami przeciwnych znaków – jednostronnej.

Współrzędne barycentryczne

Z opisanych wyżej obserwacji Ferdinand Möbius wyciągnął wniosek, że można zamiast tradycyjnych współrzędnych kartezjańskich wprowadzić współrzędne oparte na ciężarach i wyporach. Mianowicie, na płaszczyźnie obieramy (dowolnie) trójkąt $A_1A_2A_3$ (nazywać go będziemy *układem odniesienia*), a każdemu punktowi P płaszczyzny przypisujemy ciężary/wypory (m_1, m_2, m_3) takie, by po umieszczeniu ich w punktach A_1, A_2, A_3 środek ciężkości wypadł w P. Tę trójkę (m_1, m_2, m_3) nazywamy współrzędnymi barycentrycznymi punktu P. Warto zwrócić uwagę na dwie zasadnicze różnice między współrzędnymi, do których jesteśmy przyzwyczajeni, a współrzędnymi barycentrycznymi.

O pierwszej traktuje Wniosek 1: współrzędne barycentryczne dane są z dokładnością do proporcjonalności, mówimy, że są *jednorodne*. Wynika z tego fakt, że wszystkie wyrażenia opisujące różne geometryczne sytuacje za pomocą współrzędnych barycentrycznych muszą być odporne na zmianę wszystkich występujących w nich współrzędnych na proporcjonalne. Takie funkcje, też nazywane jednorodnymi, mają dużo korzystnych własności, których nie będziemy tu opisywać, ale które są powodem, że wszelkie nowoczesne teorie geometryczne korzystają z tych właśnie współrzędnych.

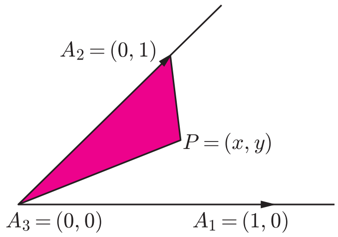
Funkcja n zmiennych jest jednorodna stopnia k, jeśli dla każdego λ zachodzi

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \\ = \lambda^k \cdot f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Jeśli f jest wielomianem, warunek jednorodności oznacza, że wszystkie jego wyrazy są tego samego stopnia; np. $x^4 + 2x^2y^2 - 7xyz^2$ jest funkcją jednorodną stopnia 4 trzech zmiennych.

Druga różnica to fakt, że jeśli suma ciężarów/wyporów w trójce (m_1, m_2, m_3) jest równa zeru, ale nie jest to trójka $(0, 0, 0)$, to na płaszczyźnie nie ma punktu, który byłby środkiem ciężkości tak obciążonego układu odniesienia – łatwo zauważyć, że już dwa punkty obciążone odpowiednio ciężarem 1 i wyporem -1 nie mają środka ciężkości. Wobec tego można dla tych obciążeń do płaszczyzny dołączyć idealne punkty będące wyimaginowanymi ich środkami ciężkości. Tak wzbogacona płaszczyzna nazywa się płaszczyzną rzutową – znów nie będziemy tu przytaczali jej rewelacyjnych własności, tylko odeślemy do artykułu Marii Donten-Bury w *Delcie* 6/2011.

A tu zajmiemy się więc „zwykłymi" punktami, czyli tymi, dla których suma ich współrzędnych barycentrycznych jest różna od zera. Jeśli tak jest, to spośród różnych trójek (m_1, m_2, m_3), wyznaczających dany punkt P, możemy wybrać tę (jedyną), dla której suma współrzędnych wynosi 1 – o tej trójce $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$ mówimy, że to *współrzędne arealne* punktu P. Od razu zauważmy, że dwie z tych współrzędnych wyznaczają trzecią. Te współrzędne arealne pozwalają wskazać związek między współrzędnymi kartezjańskimi (nawet ukośnokątnymi) a współrzędnymi barycentrycznymi.



Rys. 4

Weźmy pod uwagę dla punktu A_1 obciążenie $(1,0,0)$, dla A_2 obciążenie $(0,1,0)$ i dla A_3 obciążenie $(0,0,1)$. To są zresztą ich współrzędne arealne. Potraktujmy pierwsze dwie współrzędne tych punktów jako ich współrzędne kartezjańskie. Zastanówmy się teraz, jakie arealne obciążenia układu odniesienia umieszczą środek ciężkości w punkcie P o kartezjańskich współrzędnych (x,y).

Poszukiwane współrzędne arealne punktu P oznaczmy przez $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$.
Z Wniosku 2 wynika (rys. 4), że skoro $\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 = 1$, to

$$\Delta_{A_2A_3P} = \bar{m}_1 \Delta_{A_1A_2A_3},$$

a równość ta prowadzi do rachunku

$$x = 2 \cdot \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \bar{m}_1 \cdot \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{m}_1$$

i, analogicznie, $y = \bar{m}_2$.

Korzystamy tu z faktu, że trójkąt, którego wierzchołki mają w kartezjańskim układzie współrzędnych współrzędne (p_1, p_2), (q_1, q_2), (r_1, r_2), ma pole

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix}.$$

Warto dodać uwagę, że gdy układ współrzędnych nie jest prostokątny, za jednostkę pola przyjmujemy tutaj (jak w układzie prostokątnym) podwojone pole trójkąta utworzonego przez wektory jednostkowe osi.

Czytelnik Niedoinformowany w kwestii wyznaczników może w tych i dalszych rachunkach przyjąć, że wyznaczniki są inną formą zapisu liczb:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} + \\ - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22}),$$

co pozwoli mu arytmetycznie sprawdzić, czy nie ma gdzieś błędu.

Okazuje się więc, że współrzędne arealne to zwykłe współrzędne uzupełnione tylko trzecią liczbą, dopełniającą ich sumę do jedynki. Pozwala to na następujący rachunek dla punktów $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$, $R = (r_1, r_2, r_3)$, danych przez swoje współrzędne arealne:

$$\Delta_{PQR} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Wobec tego punkty P, Q, R są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd równanie prostej PQ to

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$x_1 \cdot \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Jak łatwo zauważyć, równanie to nie zmieni się, gdy przejdziemy do dowolnych współrzędnych barycentrycznych.

Dowód twierdzenia Routha

jest teraz czysto rachunkowy. Jeśli za układ odniesienia współrzędnych barycentrycznych przyjmiemy trójkąt ABC, to jego wierzchołki będą miały odpowiednio współrzędne $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$ i pole tego trójkąta będzie równe $\frac{1}{2}$.

Współrzędne punktu K (rys. 1) obliczamy ze wzoru (1) – skoro ramiona mają być w stosunku $1 : \lambda$, więc ciężary muszą być odwrotnie proporcjonalne, co daje 0 w A, λ w B i 1 w C, czyli współrzędne barycentryczne K to $(0, \lambda, 1)$. Ze wzoru (3) mamy równanie prostej AK: $x_2 = \lambda x_3$. Analogicznie dostajemy współrzędne L: $(1, 0, \mu)$ i równanie prostej BL: $x_3 = \mu x_1$ oraz współrzędne M: $(\nu, 1, 0)$ i równanie prostej CM: $x_1 = \nu x_2$. Rozwiązując wszystkie trzy układy par tych równań, otrzymujemy współrzędne P: $(1, \lambda\mu, \mu)$, współrzędne Q: $(\nu, 1, \mu\nu)$ i współrzędne R: $(\nu\lambda, \lambda, 1)$.

Trzeba jeszcze pamiętać, że do obliczania pól trójkątów używamy współrzędnych arealnych, a te otrzymać można, dzieląc dowolne współrzędne barycentryczne przez ich sumę. Obliczamy więc pole trójkąta KLM:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\lambda+1} & \frac{1}{\lambda+1} \\ \frac{1}{\mu+1} & 0 & \frac{\mu}{\mu+1} \\ \frac{\nu}{\nu+1} & \frac{1}{\nu+1} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & \mu \\ \nu & 1 & 0 \end{vmatrix}}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}$$

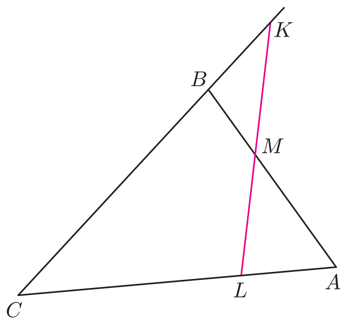
oraz – analogicznie – pole trójkąta PQR:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda\mu & \mu \\ \nu & 1 & \mu\nu \\ \nu\lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{(\lambda\mu+\mu+1)(\mu\nu+\nu+1)(\nu\lambda+\lambda+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1+(\lambda\mu\nu)^2+\lambda\mu\nu-3\lambda\mu\nu}{(\lambda\mu+\mu+1)(\mu\nu+\nu+1)(\nu\lambda+\lambda+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(\lambda\mu\nu-1)^2}{(\lambda\mu+\mu+1)(\mu\nu+\nu+1)(\nu\lambda+\lambda+1)},$$

co kończy dowód.



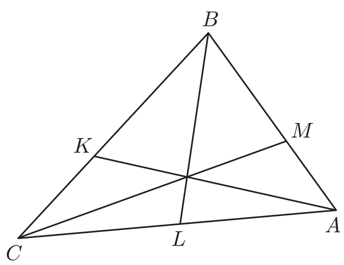
Rys. 5. Trójkąt KLM znika, ale gdzie jest teraz trójkąt PQR?

Steinhaus, Chung, Feynman, Menelaos, Ceva...

Steinhaus w *Kalejdoskopie matematycznym* (i Chung, chcąc zażartować z Feynmana) pyta tylko o pole trójkąta PQR i tylko w przypadku, gdy $\lambda=\mu=\nu=\frac{1}{2}$. Zagadnienie, w sytuacji gdy wszystkie współczynniki są równe, przedstawia się o wiele prościej: otrzymujemy dla stosunku pola KLM i PQR do pola ABC

$$\frac{\lambda^3+1}{(\lambda+1)^3} \quad \text{i} \quad \frac{(\lambda^3-1)^2}{(\lambda^2+\lambda+1)^3} = \frac{(\lambda^3-1)^2(\lambda-1)^3}{(\lambda^2+\lambda+1)^3(\lambda-1)^3} = \frac{(\lambda-1)^3}{\lambda^3-1},$$

co dla $\lambda=\frac{1}{2}$ daje $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{7}$ (ten ostatni wynik miał właśnie obliczyć Feynman – mógł też zajrzeć do wielokrotnie od 1938 r. wznawianego w USA *Mathematical Snapshots*, czyli *Kalejdoskopu*).



Rys. 6. A teraz znika trójkąt PQR.

Ale twierdzenie Routha ma o wiele ciekawsze przypadki szczególne:

- *gdy* $\lambda\mu\nu=-1$, *punkty* K, L, M *leżą na jednej prostej* (rys. 5);
- *gdy* $\lambda\mu\nu=1$, *proste* AK, BL *i* CM *przecinają się w jednym punkcie* (rys. 6),

co nie wymaga już żadnego dowodu. Fakty te znane są jako *twierdzenie Menelaosa* i *twierdzenie Cevy*. Czytelnik Zaangażowany potrafi z pewnością podać jeszcze inne wnioski z twierdzenia Routha.

Zadania

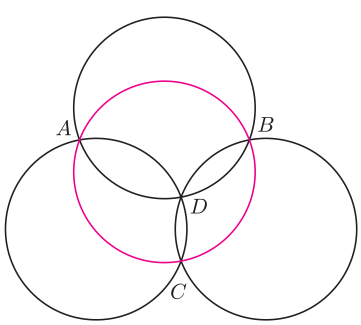
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 807. Punktowe źródło światła S oświetla przezroczystą kulkę. Dzięki przesłonie padają na nią tylko promienie biegnące blisko osi k łączącej S ze środkiem kulki. W efekcie w odległości b za kulką powstał obraz źródła S. Kulkę przecięto przez środek prostopadle do k i powierzchnię przecięcia posrebrzono. Gdzie teraz znajduje się obraz źródła S?
Rozwiązanie na str. 11

F 808. Punktowe źródło światła znajduje się pod dnem cylindra na jego osi. Cylinder jest wykonany z materiału o współczynniku załamania n. Dla jakiej najmniejszej wartości n ani jeden promień światła nie wydostanie się przez powierzchnię boczną na zewnątrz?
Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1342. Mówimy, że funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ma *cykl długości* n *o początku* x_0, gdy istnieje takie x_0, że liczby x_0, $x_1=f(x_0)$, $x_2=f(x_1)$, …, $x_{n-1}=f(x_{n-2})$ są parami różne, zaś $x_n=f(x_{n-1})=x_0$. Udowodnić, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych ma cykl o początku będącym liczbą całkowitą, to jest on długości 1 lub 2.
Rozwiązanie na str. 20



M 1343. Trzy okręgi o jednakowym promieniu r mają dokładnie jeden punkt wspólny D i przecinają się parami jeszcze w punktach A, B i C. Udowodnić, że okrąg wyznaczony przez punkty A, B i C również ma promień długości r.
Rozwiązanie na str. 19

M 1344. W zawodach matematycznych wzięło udział 100 uczniów. Mieli oni do rozwiązania 5 zadań. Wiadomo, że każde zadanie zostało rozwiązane przez przynajmniej 56 uczniów. Wykazać, że można wskazać takich dwóch uczniów, że każde zadanie zostało rozwiązane przynajmniej przez jednego z nich.
Rozwiązanie na str. 24