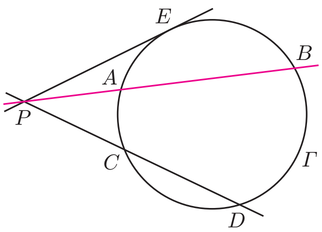
deltoid 38

Potęga punktu

Joanna JASZUŃSKA

Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg Γ w punktach A i B (rys. 1 i 2). Wówczas wartość iloczynu $PA \cdot PB$ nie zależy od wyboru prostej.

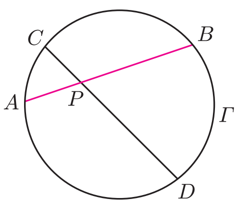


Rys. 1. $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2$

Istotnie, w sytuacji z rysunku 1 mamy $\sphericalangle CDA = \sphericalangle ABC$, więc $\triangle PDA \sim \triangle PBC$. Stąd $PA/PD = PC/PB$, czyli rzeczywiście $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Podobnie dla prostej stycznej do okręgu, $\sphericalangle PEA = \sphericalangle PBE$, więc $\triangle PEA \sim \triangle PBE$. Stąd $PA/PE = PE/PB$, czyli także w tym przypadku $PA \cdot PB = PE^2$.

Dowód, że $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ w sytuacji z rysunku 2 przebiega analogicznie. $\square$



Rys. 2. $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Wobec powyższego, *potęgę punktu P względem okręgu Γ* określamy następująco: $\mathrm{Pot}(P, \Gamma) = PA \cdot PB$ dla P na zewnątrz Γ, $\mathrm{Pot}(P, \Gamma) = -PA \cdot PB$ dla P wewnątrz Γ oraz $\mathrm{Pot}(P, \Gamma) = 0$ dla P na okręgu Γ.

1. Sprawdź, że jeśli $\Gamma = \mathcal{O}(O, r)$, to $\mathrm{Pot}(P, \Gamma) = PO^2 - r^2$.

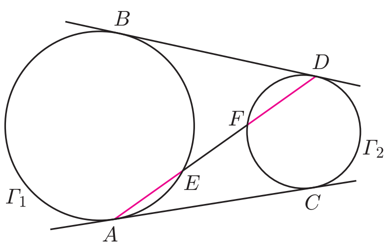
2. Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie P, przy czym $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Wykaż, że punkty A, B, C, D leżą na jednym okręgu (rys. 2).

Uwaga. Podobny fakt można udowodnić dla sytuacji z rysunku 1.

3. W trójkącie ostrokątnym ABC wysokość z wierzchołka A przecina okrąg o średnicy BC w punktach K i L, a wysokość z wierzchołka B przecina okrąg o średnicy AC w punktach M i N. Wykaż, że punkty K, L, M, N leżą na jednym okręgu.

4. Punkty P, A, B leżą w tej kolejności na prostej, punkt E – poza nią. Wykaż, że jeśli $PA \cdot PB = PE^2$, to prosta PE jest styczna do okręgu opisanego na $\triangle ABE$ (rys. 1).

5. Punkty P, A, B leżą w tej kolejności na prostej. Wyznacz zbiór punktów styczności prostych przechodzących przez P do okręgów przechodzących przez A i B.



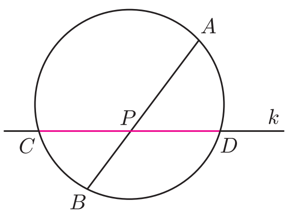
Rys. 3

6. Okręgi Γ_1 i Γ_2 są rozłączne zewnętrznie. Wspólne styczne, nierozdzielające ich, są styczne do Γ_1 w punktach A i B, a do Γ_2 – odpowiednio w C i D (rys. 3). Odcinek AD przecina okręgi Γ_1 i Γ_2 odpowiednio w E i F. Wykaż, że $AE = DF$.

7. Punkty A i B leżą po różnych stronach prostej k. Skonstruuj taki okrąg, przechodzący przez punkty A i B, aby długość jego cięciwy CD wyznaczonej przez prostą k była minimalna.

8. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Punkt E jest środkiem cięciwy AC oraz $\sphericalangle AEB = \sphericalangle AED$. Wykaż, że $BE \cdot DE = AE^2$.

9. Na kartce narysowano łuk okręgu, którego środek jest poza kartką, oraz punkt P na zewnątrz tego okręgu. Skonstruuj punkty styczności okręgu z prostymi przechodzącymi przez P wiedząc, że punkty te mieszczą się na kartce.



Rys. 4

Jak skonstruować $\sqrt{PA \cdot PB}$?

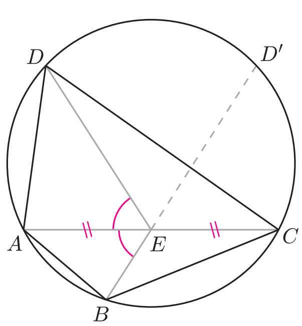
Rozwiązania niektórych zadań

R2. Niech okrąg Γ opisany na trójkącie ABC przecina prostą CP w drugim punkcie D'. Wtedy $-\mathrm{Pot}(P, \Gamma) = PC \cdot PD' = PA \cdot PB = PC \cdot PD$, zatem $PD' = PD$. Oba punkty D, D' leżą na prostej CP po tej samej stronie P, więc $D = D'$. $\square$

R5. Niech E będzie jednym z rozważanych punktów styczności, wtedy $PE^2 = PA \cdot PB$. Takie punkty leżą więc na okręgu $\mathcal{O}(P, \sqrt{PA \cdot PB})$. Z kolei z zadania 4, każdy punkt z tego okręgu i spoza prostej AB należy do szukanego zbioru. $\square$

R6. Jako że $AC = DB$, to $AF \cdot AD = \mathrm{Pot}(A, \Gamma_2) = AC^2 = DB^2 = \mathrm{Pot}(D, \Gamma_1) =$ $= DE \cdot DA$. Stąd $AF = DE$, więc też $AE = AF - EF = DE - EF = DF$. $\square$

Wskazówka 7. Niech P będzie punktem przecięcia prostej k i odcinka AB (rys. 4). Wartość $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ nie zależy od wyboru okręgu. Z nierówności średnich $CD = PC + PD \geqslant 2\sqrt{PC \cdot PD}$ i równość zachodzi (czyli długość CD jest minimalna), gdy $PC = PD$. Jak skonstruować taki okrąg?



Rys. 5

Wskazówka 8. Niech D' będzie drugim punktem przecięcia prostej BE i okręgu (rys. 5). Wtedy $\sphericalangle CED' = \sphericalangle AED$ oraz $D'E = DE$ (dlaczego?).

Wskazówka 9. Narysuj prostą przez P, przecinającą dany łuk w dwóch punktach.

Pojęcie potęgi punktu, choć bardzo przydatne, jest tylko prostym wnioskiem z podobieństwa trójkątów. Okazuje się jednak, że pojęcie to prowadzi do ciekawych, trudniejszych twierdzeń – o tym w następnym *deltoidzie*.