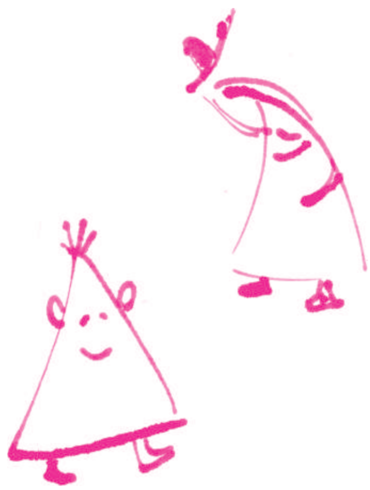
Osobliwość trójkątów

*Jarosław GÓRNICKI**

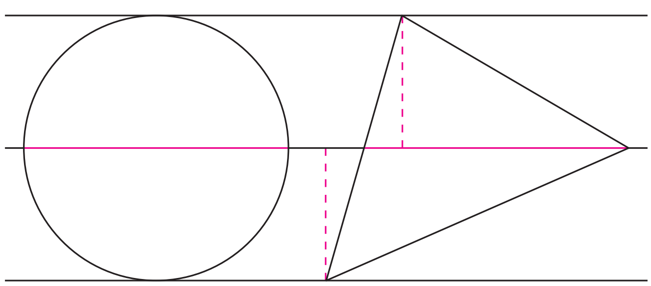
Pole figury F zawartej między prostymi $x = a$, $x = b$, gdzie $a < b$, oraz krzywymi $y_1 = f(x)$, $y_2 = g(x)$, gdzie $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a, b]$, można wyrazić wzorem $|F| = \int_a^b (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x$. Jeśli wprowadzimy funkcję $r(x) = g(x) - f(x)$, to $|F| = \int_a^b r(x)\,\mathrm{d}x$. Ostatnia zależność dowodzi, że kształt figury F nie ma żadnego znaczenia, ważna jest jedynie długość odcinków $r(x)$ dla różnych wartości zmiennej x. Tę obserwację wyraża **zasada Cavalieriego dla figur płaskich**:



jeżeli dwie figury płaskie w przecięciu z każdą prostą równoległą do danej dają przekrój o tej samej długości, to pola tych figur są równe.

Przekroje nie muszą nawet być w jednym kawałku – wystarczy, żebyśmy umieli obliczyć sumaryczną długość takiego przekroju. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe – istnieją figury o równych polach, których nie można ułożyć na płaszczyźnie tak, że przecinane prostymi równoległymi o wskazanym kierunku, w każdym przypadku będą dawać przekroje o równych długościach.

Twierdzenie 1. *Nie istnieje trójkąt T o polu πr^2, taki że przekroje pewnego koła o promieniu r i trójkąta T każdą prostą równoległą do danej są odcinkami o równych długościach.*



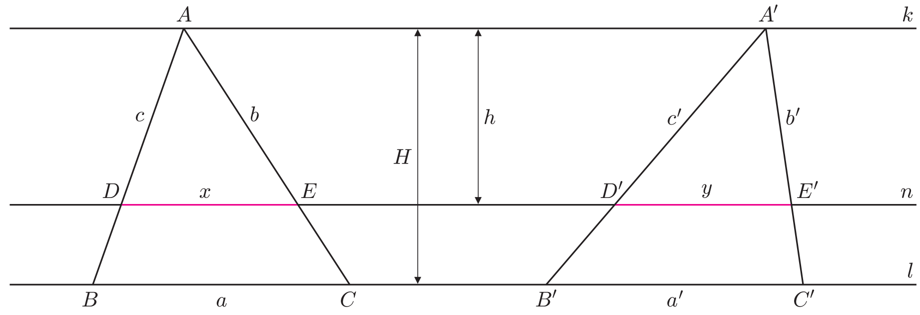
Dowód. Gdyby istniało takie położenie koła o promieniu $r > 0$ i trójkąta T, w którym każda prosta o ustalonym kierunku przecinałaby te figury na odcinkach równej długości (jeśli w ogóle by je przecinała), to prosta, która przechodziłaby przez środek koła, musiałaby przechodzić przez jeden z wierzchołków trójkąta i jej przecięcie z trójkątem miałoby długość $2r$. Trójkąt T zostałby podzielony na dwa trójkąty, dla których to przecięcie byłoby wspólną podstawą. Ponieważ opuszczone na nią wysokości w sumie miałyby długość $2r$, więc pole trójkąta musiałoby być równe $2r^2 \neq \pi r^2$. Uzyskana sprzeczność kończy dowód. $\square$

W przypadku trójkątów o równych polach sytuacja jest całkowicie odmienna, chociaż niełatwo to sobie wyobrazić, gdy patrzymy na dwa trójkąty o równych polach, z których jeden jest „cienki i długi", a drugi „krótki i pękaty".

Twierdzenie 2 (H. Eves, 1991)**.** *Dla trójkątów o równych polach istnieje takie ich położenie na płaszczyźnie, że każda prosta równoległa do danej przecina każdy z trójkątów na odcinku o tej samej długości.*

Dowód. Załóżmy, że trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają równe pola. Rozpatrzmy dwa przypadki.

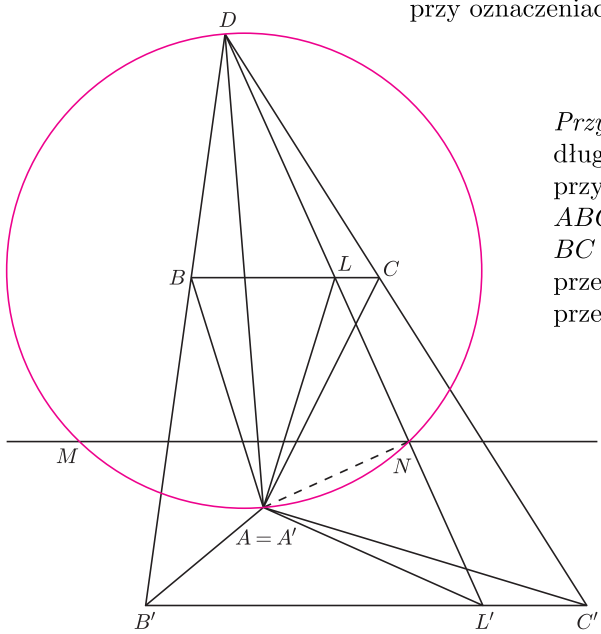
Przypadek 1. Jeden bok trójkąta ABC ma taką samą długość jak jeden bok trójkąta $A'B'C'$. Możemy przyjąć bez straty ogólności, że $|BC| = |B'C'|$. Umieszczamy trójkąty ABC i $A'B'C'$ tak, aby boki BC oraz $B'C'$ leżały na prostej l, zaś wierzchołki A i A' leżały w tej samej półpłaszczyźnie.



*Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska

Ponieważ trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają równe pola, więc wierzchołki A i A' leżą na prostej k równoległej do l. Sprawdźmy, że dla dowolnej prostej n, równoległej do l, jej przekroje z trójkątami ABC i $A'B'C'$ są równe, czyli $|DE| = |D'E'|$ przy oznaczeniach z rysunku. Istotnie, z twierdzenia Talesa mamy

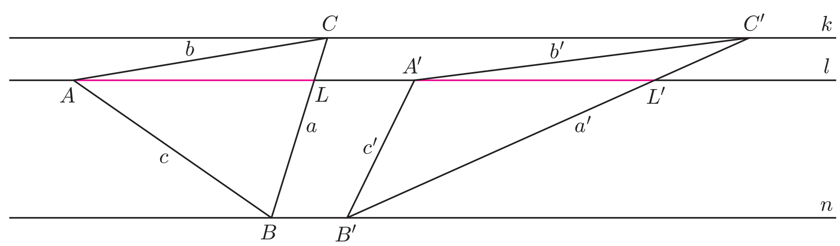
$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{H}{h} = \frac{|A'B'|}{|A'D'|} = \frac{|B'C'|}{|D'E'|}.$$



Przypadek 2. W trójkącie ABC żaden bok nie ma takiej samej długości jak bok trójkąta $A'B'C'$. Bez utraty ogólności rozważań przyjmujemy, że $a = |BC| < |B'C'| = a'$. Umieszczamy trójkąty ABC i $A'B'C'$ tak, że mają one wspólny wierzchołek $A = A'$, boki BC i $B'C'$ są równoległe i punkt A należy do pasa wyznaczonego przez proste zawierające te odcinki. Niech D będzie punktem przecięcia prostych BB' i CC'.

Na odcinku DA, jako na średnicy, wykreślamy okrąg O. Prosta przechodząca przez środki boków BB' i CC' przecina ten okrąg w punktach M i N. Wówczas prosta DN przecina odcinek BC w punkcie L, a odcinek $B'C'$ w punkcie L'. Punkty L i L' dzielą odcinki BC i $B'C'$ w takim samym stosunku, na mocy twierdzenia Talesa. Zatem pole trójkąta ACL stanowi taką samą część pola trójkąta ABC, jaką częścią pola trójkąta $A'B'C'$ jest pole trójkąta $A'C'L'$. Ponieważ pola trójkątów ABC i $A'B'C'$ są równe, więc równe są też pola trójkątów ACL i $A'C'L'$.

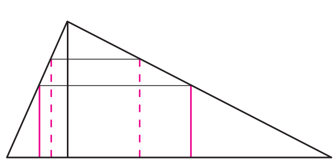
Ponadto, ponieważ $|LN| = |NL'|$ i kąt DNA jest prosty, więc $|AL| = |A'L'|$. Umieszczamy teraz trójkąty ABC i $A'B'C'$ tak, by odcinki AL i $A'L'$ leżały na prostej l, a wierzchołki C i C' leżały w tej samej półpłaszczyźnie. Z równości pól trójkątów ACL i $A'C'L'$ wynika, że wierzchołki C i C' leżą na prostej k równoległej do l, a wierzchołki B i B' na prostej n, także równoległej do l.



Dwukrotne odwołanie do przypadku 1 kończy dowód twierdzenia. □

Powiadają, że dwaj najmłodsi uczniowie Galileusza, Bonaventura Cavalieri i Evangelista Torricelli, byli ludźmi do tego stopnia pogodnymi i pełnymi poczucia humoru, że nawet podczas pracy naukowej robili sobie wzajemnie zaawansowane psikusy ku uciesze znajomych. Ich najważniejsze dzieło, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, przedstawiało oryginalną koncepcję powstawania podstawowych figur geometrycznych, nazywanych przez nich kontinuami. Twierdzili mianowicie, że linia to zapis dziejów punktu w jakimś przedziale czasu, powierzchnia to dzieje linii, a bryła to dzieje powierzchni. Przy takim podejściu istotne było podanie reguł, jak przy ruchu punktu powstaje długość, jak przy ruchu linii powstaje pole, a przy ruchu powierzchni – objętość.

Podobno w początkowej redakcji stosownego rozdziału Cavalieri napisał, że miary te są zsumowaniem elementów niższego wymiaru (tych tytułowych *niepodzielnych*): długość linii powstaje ze zsumowania punktów składających się na nią, pole – długości odcinków, a objętość ze zsumowania pól figur płaskich. Przeczytawszy to, Torricelli zaprosił znajomych na obiad, na którym stwierdził: *Mój kolega Bonaventura, oglądając* (załączony) *rysunek, udowodnił, że pole trójkąta prostokątnego z lewej strony jest równe polu trójkąta z prawej – przecież każdemu pionowemu odcinkowi składającemu się na jeden z nich odpowiada dokładnie jeden odcinek składający się na drugi!*



Podobno koledzy śmiali się i bawili przez wiele godzin, a Cavalieri po powrocie do domu sformułował zasadę, nazywaną dziś jego imieniem, już poprawnie.

M. K.