deltoid 31

Sumy nieskończone

Joanna JASZUŃSKA

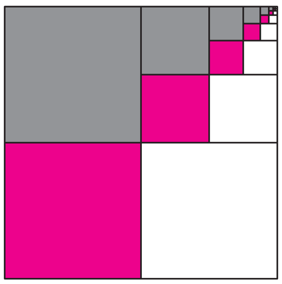
Niektóre sumy nieskończone można zilustrować, tworząc nieskończony rysunek, którego pewna część jest podobna do całości. Na przykład na rysunku 1 taką częścią jest jego prawa górna ćwiartka, a także prawa górna ćwiartka tej ćwiartki itd. Poniżej kilka przykładów sum nieskończonych wraz z tego rodzaju ilustracjami. Na każdym z rysunków kolorowa część odpowiada rozważanej sumie.

Dlaczego poszczególne rysunki ilustrują odpowiednie sumy? Które części rysunków są podobne do całości?

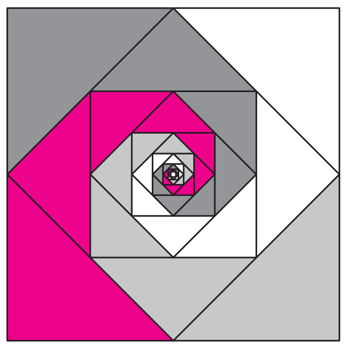
Rys. 1. $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots=\frac{1}{3}.$

Rys. 2. $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots=\frac{1}{4}.$

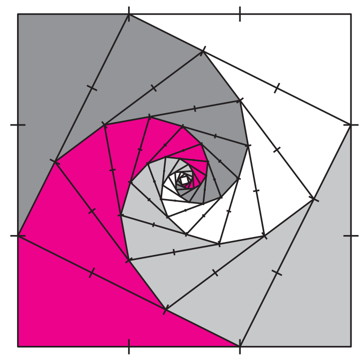
Rys. 3. $\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\cdot\frac{5}{9}+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^2+\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^3+\ldots=\frac{1}{4}.$



Rys. 1



Rys. 2

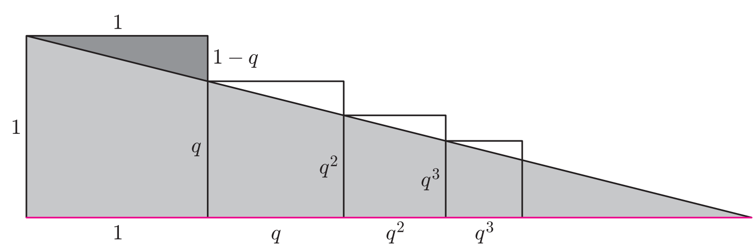


Rys. 3

Równości 1–3 można też uzyskać ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego:

Rys. 4. Dla $0<q<1$ zachodzi równość $1+q+q^2+q^3+\ldots=\dfrac{1}{1-q}.$

Opis: Ustawmy kolejno kwadraty o bokach $1, q, q^2, q^3, \ldots$



Rys. 4

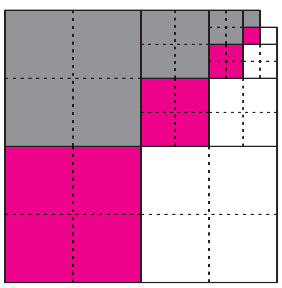
Połączmy lewe górne wierzchołki kolejnych kwadratów. Uzyskane odcinki leżą na jednej prostej, bo w każdym kwadracie prawy bok podzielony jest w takim samym stosunku $(1-q):q$. Jasny trójkąt jest podobny do ciemnego (bo mają równe kąty), stąd równość stosunków długości ich przyprostokątnych:

$$\frac{1+q+q^2+q^3+\ldots}{1}=\frac{1}{1-q}.\ \square$$

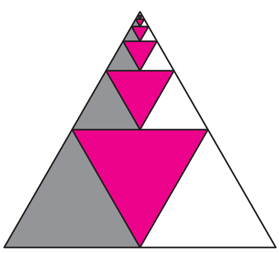
Podobnymi rysunkami można ilustrować niektóre sumy skończone:

Rys. 5. Dla całkowitych $n>0$ zachodzi $1+4+4^2+4^3+\ldots+4^n=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)$.

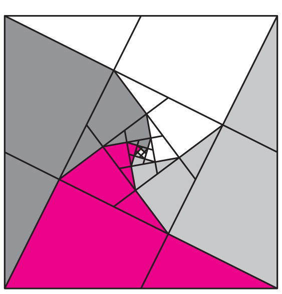
Opis: Kwadraty w każdym z trzech kolorów mają łączne pole $1+4+4^2+4^3+\ldots+4^n$, a wszystkie razem mają pole $4\cdot4^n-1=4^{n+1}-1$. $\square$



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7

Zadania domowe

1. Znajdź ilustracje sum:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots=1,\qquad \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots=\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{9}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\ldots=\frac{1}{8}.$$

2. Ilustracją jakiej sumy jest rysunek 6?

3. Sprawdź, że rysunek 7 jest ilustracją sumy $\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots=\frac{1}{4}.$

Literatura

C. Alsina, R. Nelsen, *Math Made Visual*, The Mathematical Association of America, 2006.