W zawodach II stopnia LXII Olimpiady Matematycznej wzięło udział 599 uczniów z całej Polski. Spośród nich do finału zakwalifikowano 139 osób. Oto jeden z problemów, z którymi przyszło im się zmierzyć:

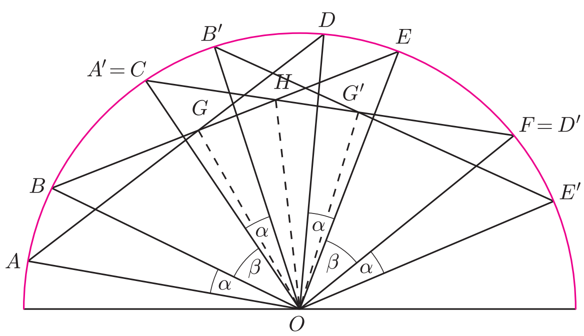
Zadanie 4. *Punkty A, B, C, D, E, F leżą w tej kolejności na półokręgu o środku O, przy czym $AD = BE = CF$. Cięciwa BE przecina cięciwy AD i CF odpowiednio w punktach G i H. Wykazać, że*

$$\sphericalangle AOC = 2\sphericalangle GOH.$$

Jedną z metod używanych do dowodu tej równości było obrócenie układu punktów A, B, C i D o kąt $\sphericalangle AOC$ wokół środka O i stąd wnioskowanie o kątach. Przedstawimy jedno z najładniejszych rozwiązań tego typu. Opiera się ono na pracy ucznia Krzysztofa Kleinera z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie.

Rozwiązanie. Bez straty ogólności możemy założyć, że promień danego okręgu wynosi 1. Będziemy używać łukowych miar kątów, tzn. $\sphericalangle XOY$ ma miarę równą długości łuku $\widehat{XOY}$. Ponieważ $AD = BE = CF$, więc $\sphericalangle AOD = \sphericalangle BOE = \sphericalangle COF$. W takim razie

$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD - \sphericalangle BOD = \sphericalangle BOE - \sphericalangle BOD = \sphericalangle DOE.$$



Analogicznie

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle DOF \quad \text{i} \quad \sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF.$$

Oznaczmy, jak na rysunku, $\sphericalangle AOB = \sphericalangle DOE = \alpha$ oraz $\sphericalangle BOC = \sphericalangle EOF = \beta$. Mamy wtedy

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle DOF = \alpha + \beta.$$

Obróćmy płaszczyznę o kąt $\varphi = \alpha + \beta$ wokół punktu O zgodnie z ruchem wskazówek zegara i oznaczmy obraz dowolnego punktu X przez X'. W szczególności mamy $A' = C$ i $D' = F$. Punkt E' leży na okręgu, choć – być może – poza danym półokręgiem. Mamy wtedy następujące równości kątów:

$$\sphericalangle COB' = \sphericalangle A'OB' = \sphericalangle DOE = \sphericalangle D'OE' = \sphericalangle FOE' = \alpha.$$

Oznaczmy przez l_{XY} prostą zawierającą punkty X i Y. Ponieważ $G \in l_{AD} \cap l_{BE}$, więc $G' \in l_{A'D'} \cap l_{B'E'} = l_{CF} \cap l_{B'E'}$. Zauważmy teraz, że ośmiokąt $OE'FEDB'CBO$ jest przystający do figury $OABCB'DEFO$. Istnieje zatem izometria płaszczyzny przekształcająca punkty O, E', F, E, D, B', C i B odpowiednio na punkty O, A, B, C, B', D, E i F. Zatem obrazem prostej $l_{B'E'}$ jest prosta l_{AD}, prostej $l_{D'A'} = l_{FC}$ – prosta l_{BE}, a prostej l_{BE} – prosta l_{FC}.

W takim razie: punkt $G' \in l_{B'E'} \cap l_{D'A'} = l_{B'E'} \cap l_{FC}$ przechodzi na $G \in l_{DA} \cap l_{BE} = l_{CF} \cap l_{EB}$, a punkt $H \in l_{A'D'} \cap l_{BE} = l_{CF} \cap l_{EB}$ na siebie.

Stąd wynika równość $\sphericalangle G'OH = \sphericalangle GOH$, a z niej:

$$\sphericalangle AOC = \sphericalangle GOG' = 2\sphericalangle GOH,$$

czego chcieliśmy dowieść.

Uwaga. Izometria, o której mowa w rozwiązaniu, to symetria względem prostej OH, bo jest to złożenie obrotu o kąt α, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, wokół punktu O, z symetrią osiową względem prostej OH i jeszcze raz z tym samym obrotem.

Andrzej FRYSZKOWSKI