Sprawa niezbyt pedagogiczna

*Jerzy ZABCZYK**

Richard Feynman, laureat Nagrody Nobla z fizyki, miał bardzo krytyczny stosunek do rozważań czysto teoretycznych. Wspomina o tym Kai Lai Chung, wybitny probabilista amerykański, w książce *Green, Brown and Probability.* Feynman wypowiadał się o *eternal futility* nie tylko matematyki wyższej, ale również teoretycznej fizyki i astronomii. Twierdził, że matematycy są niepotrzebni, bo gdy fizykowi jakiś wynik matematyczny będzie potrzebny, to sam potrafi go udowodnić. Wiedząc o tym, Chung postanowił z Feynmana zażartować i podczas spotkania w restauracji zaproponował mu udowodnienie następującego twierdzenia geometrycznego.

Od redaktora: Chung zapewne zaczerpnął zadanie z popularnego w angielskim kręgu językowym *Mathematical Snapshots* (w wydaniu z 1950 roku str. 8), czyli z *Kalejdoskopu matematycznego* Hugona Steinhausa (w wydaniu z 1989 roku zadanie i rozwiązanie jest na stronie 17).

Boki trójkąta dzielimy na trzy równe części każdy, a następnie łączymy odcinkami każdy z wierzchołków z pierwszym punktem podziału na przeciwległym boku. W rezultacie odcinki utworzą trójkąt, którego pole jest równe $\frac{1}{7}$ pola wyjściowego trójkąta.

Feynman przyjął ten fakt z niedowierzaniem i po kilku obliczeniach stwierdził, że twierdzenie nie jest prawdziwe, bo wskazują na to jego przybliżone obliczenia. Przyjął zakład, że ma rację, i poddał się dopiero wtedy, gdy stwierdził, że twierdzenie jest prawdziwe dla trójkąta równobocznego. W związku z tym zdarzeniem proponujemy kilka zadań.

Zadanie 1. Udowodnić sformułowane powyżej twierdzenie

a) dla trójkąta równobocznego,
b) dla trójkąta dowolnego.

Zadanie 2. Na bokach trójkąta zaznaczamy punkty w odległości od wierzchołków równej γ razy długość boku, gdzie $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, i łączymy je odcinkami z przeciwległymi wierzchołkami. Jaki jest stosunek pól $S(\gamma)$ trójkąta utworzonego z odcinków i wyjściowego trójkąta?

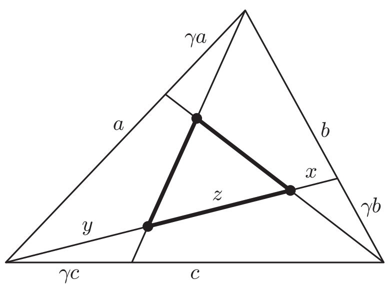
Zadanie 3. *Kontynuacja zadania 2.* Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne n, że gdy $\gamma = \frac{1}{n}$, to stosunek pól jest postaci $\frac{1}{N}$ dla pewnej liczby naturalnej N.

Zadanie 4. *Kontynuacja zadania 3.* Znaleźć wszystkie takie wymierne liczby γ, że $S(\gamma)$ jest również liczbą wymierną.

Zadanie 5. Czy dla czworokątów prawdziwe jest twierdzenie analogiczne do twierdzenia przedstawionego Feynmanowi?

Zadanie 6. *Kontynuacja zadania 2.* Wyznaczyć długości odcinków m_a, m_b, m_c łączących wierzchołki z zaznaczonymi punktami w zależności od liczby γ i długości boków trójkąta a, b, c.

Podpowiedzi



- $y : z : x = \gamma : (1-2\gamma) : \gamma^2$.
- $m_a^2 = (1-\gamma)b^2 + \gamma c^2 - \gamma(1-\gamma)a^2$,
  $m_b^2 = (1-\gamma)c^2 + \gamma a^2 - \gamma(1-\gamma)b^2$,
  $m_c^2 = (1-\gamma)a^2 + \gamma b^2 - \gamma(1-\gamma)c^2$.
- Niech $\widetilde{m}_a, \widetilde{m}_b, \widetilde{m}_c$ będą długościami boków otrzymanego trójkąta. Wtedy
$$\widetilde{m}_a = m_a \cdot \frac{1-2\gamma}{1-\gamma+\gamma^2}, \qquad \widetilde{m}_b = m_b \cdot \frac{1-2\gamma}{1-\gamma+\gamma^2}, \qquad \widetilde{m}_c = m_c \cdot \frac{1-2\gamma}{1-\gamma+\gamma^2}.$$
- Niech $S_{a,b,c}$ oznacza pole trójkąta o bokach a, b, c. Udowodnić, że
$$\frac{S_{\tilde{m}_a,\tilde{m}_b,\tilde{m}_c}}{S_{a,b,c}} = \left(\frac{1-2\gamma}{1-\gamma+\gamma^2}\right)^2 (\gamma^2 + \gamma^2(1-\gamma)^2 + (1-\gamma)^2)^{1/2}$$
  $(= \frac{1}{7}$, gdy $\gamma = \frac{1}{3})$.

[Kai Lai Chung, *Green, Brown and Probability*, World Scientific, 1995.]

*Instytut Matematyczny PAN, Warszawa