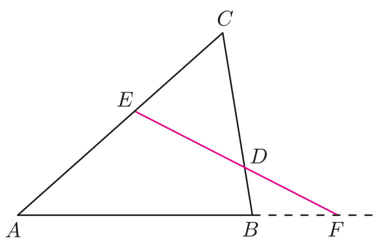
Twierdzenie Menelaosa *Joanna JASZUŃSKA*

W wielu zadaniach dane są trzy punkty, które albo są współliniowe, albo należy to o nich udowodnić. Wygodnym narzędziem bywa wtedy

Twierdzenie Menelaosa (TwM). *Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, a punkt F na przedłużeniu boku AB (rys. 1). Wówczas punkty D, E, F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1.$$

TwM jest bardzo podobne do omawianego tu miesiąc temu twierdzenia Cevy (patrz zadanie 6).



Rys. 1

1. W trójkącie ABC punkty D, E są spodkami dwusiecznych odpowiednio $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ABC$. Punkt F jest spodkiem dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C. Udowodnij, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej.

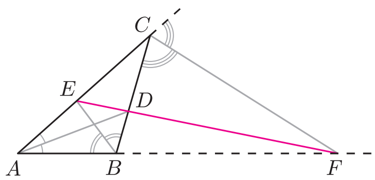
2. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC, proste AD, BE, CF przecinają się w punkcie P. Wykaż, że

$$\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}=\frac{AP}{PD}.$$

3. Sfera $\mathcal{S}$ jest styczna do krawędzi AB, BC, CD, DA czworościanu $ABCD$ odpowiednio w punktach K, L, M, N. Wykaż, że leżą one na jednej płaszczyźnie.

Rozwiązania

R1. Twierdzenie o dwusiecznej orzeka, iż: $\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{BC}$, $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$, $\frac{CE}{EA}=\frac{BC}{AB}$ (rys. 2). Zachodzi więc równość z TwM, co kończy dowód. □



Rys. 2

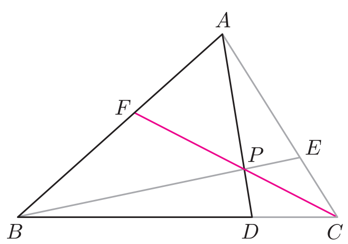
R2. Z TwM dla trójkąta ABD i prostej FP (rys. 3) zachodzi

$$\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DP}{PA}\cdot\frac{AF}{FB}=1,\quad \text{stąd}\quad \frac{AF}{FB}=\frac{AP}{PD}\cdot\frac{CD}{BC}.$$

Podobnie z TwM dla trójkąta ACD i prostej EP otrzymujemy $\frac{AE}{EC}=\frac{AP}{PD}\cdot\frac{BD}{BC}$. Zatem

$$\frac{AE}{EC}+\frac{AF}{FB}=\frac{AP}{PD}\cdot\frac{BD+CD}{BC}=\frac{AP}{PD}.\ \square$$

Ćwiczenie: Jeśli P jest środkiem okręgu wpisanego, to $\frac{AP}{PD}=\frac{AB+AC}{BC}$.



Rys. 3

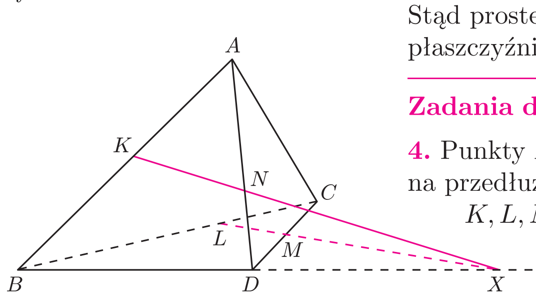
R3. Załóżmy, że prosta KN przecina prostą BD w pewnym punkcie X (poza odcinkiem BD, rys. 4). Wtedy z TwM dla trójkąta ABD i prostej KN mamy

$$\frac{BX}{XD}\cdot\frac{DN}{NA}\cdot\frac{AK}{KB}=1.$$

Odcinki stycznych do sfery z jednego punktu są równe, stąd $AK=AN$, $BK=BL$, $CL=CM$, $DM=DN$. Wobec powyższego

$$1=\frac{BX}{XD}\cdot\frac{DN}{KB}=\frac{BX}{XD}\cdot\frac{DM}{LB}=\frac{BX}{XD}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CL}{LB}.$$

Zatem z TwM dla trójkąta BCD, prosta LM przecina prostą BD w punkcie X. Stąd proste KN i LM przecinają się, więc punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie. Prostszy przypadek $KN \parallel BD$ pozostawiam jako ćwiczenie. □



Rys. 4

Zadania domowe

4. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC, a punkt F na przedłużeniu boku AB, przy czym punkty D, E, F są współliniowe. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB, zaś punkty D', E', F' – obrazami symetrycznymi punktów D, E, F w symetriach względem K, L, M. Wykaż, że punkty D', E', F' są współliniowe.

5. Udowodnij twierdzenie Menelaosa.

Wskazówka. Zrzutuj punkty A, B, C na prostą DE i zastosuj twierdzenie Talesa.

6. Udowodnij twierdzenie Cevy: *Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC. Wówczas proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy* $\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$.

Wskazówka. Wykorzystaj podobny pomysł, jak w rozwiązaniu zadania 2.

Składaniu jednokładności poświęcony był *deltoid* 3/2010.

7. Wykaż, że złożenie jednokładności o środku O_1 i skali k_1 z jednokładnością o środku $O_2 \neq O_1$ i skali $k_2 \neq \frac{1}{k_1}$ jest jednokładnością o środku na prostej O_1O_2.