Dobrze się składa

Joanna JASZUŃSKA

Jednokładność o skali dodatniej (*prostą*) oznaczamy $\mathcal{J}^+$, o skali ujemnej zaś (*odwrotną*) $\mathcal{J}^-$.

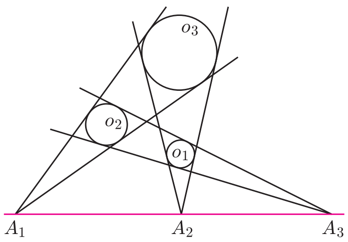
Tematem styczniowego *deltoidu* były jednokładności. Przypomnijmy, że *jednokładność* o środku O i skali $k \neq 0$ to przekształcenie geometryczne płaszczyzny, które punktowi A przypisuje punkt $A' = \mathcal{J}_O^k(A)$ spełniający warunek $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

Fakt. *Dla nieprzystających okręgów o_1 i o_2 istnieje dokładnie jedna jednokładność taka, że $\mathcal{J}^+(o_1) = o_2$, oraz dokładnie jedna taka, że $\mathcal{J}^-(o_1) = o_2$.*

Zachodzi następujące miłe twierdzenie, dowód pozostawiam jako zadanie.

Twierdzenie. *Złożenie dwóch jednokładności jest albo jednokładnością o skali będącej iloczynem wyjściowych skal i środku współliniowym ze środkami składanych jednokładności, albo przesunięciem, jeśli iloczyn wyjściowych skal jest równy* 1.

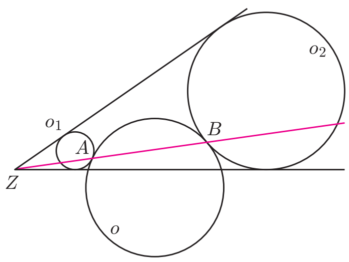
Skoro jednokładności tak dobrze się składa, zobaczmy kilka zastosowań.



Rys. 1

1. Okręgi o_1, o_2, o_3 są rozłączne zewnętrznie. Te dwie styczne do o_1 i o_2, które nie rozdzielają tych okręgów, przecinają się w punkcie A_3. Analogicznie definiujemy punkty A_1 i A_2 (rys. 1). Wykaż, że punkty A_1, A_2, A_3 są współliniowe.

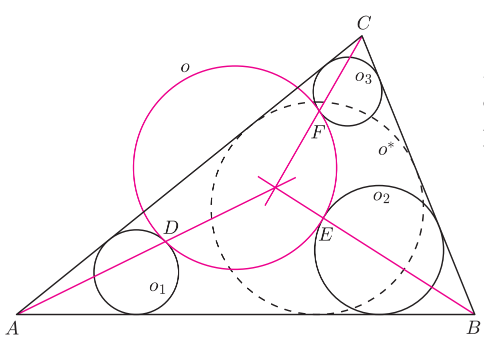
R. Punkty A_1, A_2 i A_3 są środkami jednokładności $\mathcal{J}^+_{A_1}$, $\mathcal{J}^+_{A_2}$ i $\mathcal{J}^+_{A_3}$ takich, że $\mathcal{J}^+_{A_1}(o_2) = o_3$, $\mathcal{J}^+_{A_2}(o_3) = o_1$ oraz $\mathcal{J}^+_{A_3}(o_2) = o_1$. Złożenie $\mathcal{J}^+_{A_2} \circ \mathcal{J}^+_{A_1}$ to jednokładność prosta i $\mathcal{J}^+_{A_2} \circ \mathcal{J}^+_{A_1}(o_2) = \mathcal{J}^+_{A_2}(o_3) = o_1$. Stąd jej środkiem, który na mocy twierdzenia musi leżeć na prostej A_1A_2, jest na mocy faktu punkt A_3. $\square$



Rys. 2

2. Okręgi o_1 i o_2 są rozłączne zewnętrznie i wpisane w kąt o wierzchołku Z. Okrąg o jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1 i o_2 odpowiednio w punktach A i B (rys. 2). Udowodnij, że punkty A, B, Z są współliniowe.

R. Rozważmy jednokładności $\mathcal{J}^-_A$ i $\mathcal{J}^-_B$ takie, że $\mathcal{J}^-_A(o_1) = o$ oraz $\mathcal{J}^-_B(o) = o_2$. Jednokładność $\mathcal{J}^-_B \circ \mathcal{J}^-_A$ jest prosta oraz $\mathcal{J}^-_B \circ \mathcal{J}^-_A(o_1) = \mathcal{J}^-_B(o) = o_2$, więc jej środkiem musi być punkt Z. Leży on zatem na prostej AB. $\square$



Rys. 3

3. Okręgi o_1, o_2, o_3 są styczne odpowiednio do par boków AB i AC, AB i BC oraz AC i BC trójkąta ABC. Okrąg o jest styczny zewnętrznie do okręgów o_1, o_2, o_3 odpowiednio w punktach D, E, F (rys. 3). Wykaż, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

R. Niech o^* będzie okręgiem wpisanym w trójkąt ABC. Istnieje $\mathcal{J}^-_D$ taka, że $\mathcal{J}^-_D(o) = o_1$, oraz $\mathcal{J}^+_A$ taka, że $\mathcal{J}^+_A(o_1) = o^*$, wtedy $\mathcal{J}^+_A \circ \mathcal{J}^-_D(o) = o^*$. Złożenie $\mathcal{J}^+_A \circ \mathcal{J}^-_D$ jest więc jednokładnością odwrotną, przeprowadzającą o na o^* (istnieje dokładnie jedna, nawet jeśli o i o^* są przystające lub równe). Stąd jej środek leży na prostej AD. Analogicznie, leży też na prostych BE i CF. $\square$

4. Czworokąt $A_1A_2A_3A_4$ jest wpisany w okrąg o środku O. Punkty H_1, H_2, H_3, H_4 to ortocentra trójkątów, odpowiednio, $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$. Wykaż, że czworokąty $A_1A_2A_3A_4$ i $H_1H_2H_3H_4$ są przystające.

Wykonanie rysunku pozostawiam Czytelnikowi.

Dowód twierdzenia o prostej Eulera można znaleźć w poprzednim *deltoidzie*.

R. Niech punkty S_1, S_2, S_3, S_4 będą środkami ciężkości odpowiednio powyższych czterech trójkątów, S zaś – środkiem ciężkości czwórki punktów A_1, A_2, A_3, A_4. Z własności środków ciężkości, dla każdego $i = 1, 2, 3, 4$ punkty S_i, S, A_i leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej oraz $SA_i = 3 \cdot SS_i$, zatem $\mathcal{J}_S^{-3}(S_i) = A_i$. Z twierdzenia o prostej Eulera, dla każdego i punkty O, S_i, H_i leżą, w tej właśnie kolejności, na jednej prostej oraz $SH_i = 2 \cdot SO$, stąd $\mathcal{J}_O^{1/3}(H_i) = S_i$. Złożenie $\mathcal{J}_S^{-3} \circ \mathcal{J}_O^{1/3}$ to jednokładność o skali $-3 \cdot \frac{1}{3} = -1$ (symetria środkowa), która przeprowadza $H_1H_2H_3H_4$ na $A_1A_2A_3A_4$. Zatem czworokąty te są przystające. $\square$

Poniższe zadanie pochodzi z L Olimpiady Matematycznej.

5. Punkty D, E, F leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC. Okręgi wpisane w trójkąty AEF, BFD, CDE są styczne do okręgu wpisanego w trójkąt DEF. Udowodnij, że proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie.

Wskazówka. Okręgi wpisane w trójkąty AEF i DEF są styczne wtedy i tylko wtedy, gdy w czworokąt $AFDE$ można wpisać okrąg.

Rozwiązanie na stronie `www.om.edu.pl`