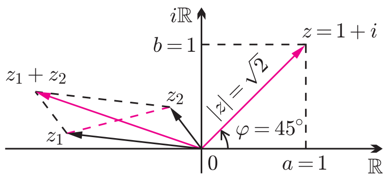
Liczby zespolone w geometrii

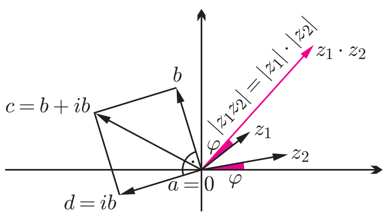
Joanna JASZUŃSKA

Liczby zespolone to liczby postaci $z = a + bi$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, zaś i to *jednostka urojona*, $i^2 = -1$. Liczby $a + bi, c + di$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a = c$, $b = d$. Można je reprezentować na płaszczyźnie: $z = (a, b)$. Wygodniejszy bywa biegunowy układ współrzędnych, wtedy $z = (|z|, \varphi)$, gdzie *moduł* $|z| \in \mathbb{R}$ to odległość z od 0, zaś φ to *argument* z: kąt od dodatniej półosi poziomej do wektora $\overrightarrow{0z}$, z dokładnością do $360°$ (rys. 1). Kąty zawsze mierzymy antyzegarowo.



Rys. 1

Dodajemy zwyczajnie: $(a + bi) + (c + di) = (a + b) + (c + d)i$. Mówiąc geometrycznie, liczby zespolone dodajemy tak, jak wektory (rys. 1). Mnożymy też zwyczajnie: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (bo $i^2 = -1$). Okazuje się, że moduły się mnoży, a argumenty dodaje. Na przykład mnożenie przez $i = (1, 90°)$ to obrót o $90°$ (rys. 2). Liczbę odpowiadającą punktowi X oznaczamy przez x.

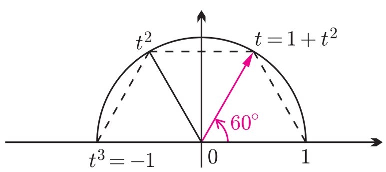


Rys. 2

Fakt 1. *Środek odcinka* Z_1Z_2 *to* $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$. *Ponadto* $\overrightarrow{Z_1Z_2} = z_2 - z_1$ (rys. 1).

Fakt 2. *Jeśli w kwadracie* $ABCD$ *mamy* $a = 0$, *to* $d = ib$ *oraz* $c = b + ib$ (rys. 2).

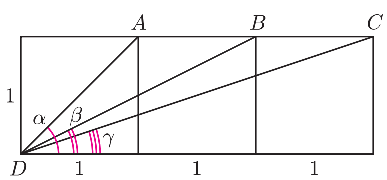
Fakt 3. *Mnożenie przez* $t = (1, 60°)$ *to obrót o* $60°$. *Ponadto* $1 + t^2 = t$ (rys. 3).



Rys. 3

Tego typu własności przydają się do rozwiązywania zadań geometrycznych.

1. W sytuacji z rysunku 4 oblicz $\alpha + \beta + \gamma$.



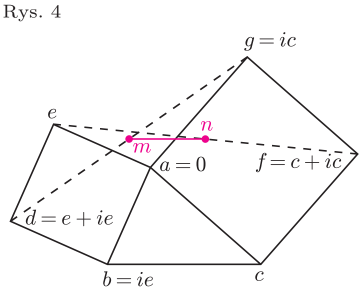
Rys. 4

R. Niech $d = 0$ i $a = (1, 1)$. Suma kątów α, β, γ to argument iloczynu liczb a, b, c. Skoro $abc = (1 + i)(2 + i)(3 + i) = 6 + 11i + 6i^2 + i^3 = 6 + 11i - 6 - i = 10i$ oraz $\alpha + \beta + \gamma < 360°$, to $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. $\square$

2. Na bokach AB i AC trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Punkty M i N są odpowiednio środkami odcinków DG i EF. Wyznacz możliwe wartości wyrażenia $MN : BC$.

[Zadanie to pochodzi z LIII Olimpiady Matematycznej.]

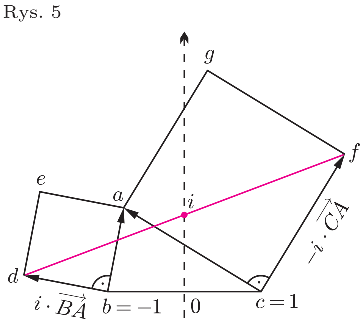
R. Niech $a = 0$ (rys. 5). Z faktu 2 mamy $g = ic$ oraz $f = c + ic$, a także $b = ie$ oraz $d = e + ie$. Z faktu 1 wyznaczamy $m = \frac{1}{2}((e + ie) + ic)$ oraz $n = \frac{1}{2}(e + (c + ic))$, a także $\overrightarrow{MN} = n - m = \frac{1}{2}(e + c + ic - e - ie - ic) = \frac{1}{2}(c - ie) = \frac{1}{2}(c - b) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Wynik sam wyszedł! $MN : BC = 1 : 2$. $\square$



Rys. 5

3. Dane są punkty B i C. Punkt A jest dowolnym punktem ustalonej półpłaszczyzny wyznaczonej przez prostą BC. Na bokach trójkąta ABC zbudowano, na zewnątrz, kwadraty $ABDE$ i $ACFG$. Wykaż, że wszystkie tak otrzymane proste DF przechodzą przez pewien ustalony punkt, zależny tylko od położenia B i C.

R. Niech $b = -1$ oraz $c = 1$ (rys. 6). Wtedy $d - b = i(a - b)$ oraz $f - c = -i(a - c)$, czyli $d + 1 = ia + i$ oraz $f - 1 = -ia + i$. Stąd po dodaniu stronami $d + f = 2i$, czyli środek odcinka DF (z faktu 1 jest nim $\frac{1}{2}(d + f)$) nie zależy od punktu A. $\square$



Rys. 6

4. Trójkąty równoboczne A_1B_1C, A_2B_2C i A_3B_3C są zorientowane antyzegarowo. Punkty M_1, M_2 i M_3 są środkami odpowiednio odcinków A_2B_3, A_3B_1 i A_1B_2. Udowodnij, że trójkąt $M_1M_2M_3$ jest równoboczny i zorientowany zegarowo.

R. Niech $c = 0$. Dla $k = 1, 2, 3$, z faktu 3 zachodzi $b_k = ta_k$, a z faktu 1 mamy $m_k = \frac{1}{2}(a_{k+1} + ta_{k-1})$, gdzie $a_4 = a_1$ i $a_0 = a_3$. Stąd i z $1 + t^2 = t$ nietrudno sprawdzić, że $(m_3 - m_1)t = m_2 - m_1$, czyli że $\overrightarrow{M_1M_3} \cdot t = \overrightarrow{M_1M_2}$, co daje tezę. $\square$

Zadania domowe:

5. Trójkąty $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ i $A_kB_kC_k$, dla $k = 1, 2, 3$, są równoboczne i zorientowane antyzegarowo. Wykaż, że trójkąt $C_1C_2C_3$ także spełnia te warunki.

6. Niech $A = (3, 1)$, $B = (3, -1)$, $C = (7, -1)$, $D = (1, 1)$, $O = (0, 0)$. Oblicz $\sphericalangle AOB + \sphericalangle COD$.

7. *Twierdzenie Napoleona.* Na bokach dowolnego trójkąta zbudowano, na zewnątrz, trójkąty równoboczne. Udowodnij, że ich środki tworzą trójkąt równoboczny.