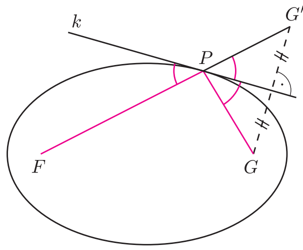
Izogonalnie sprzężone

Joanna JASZUŃSKA

Elipsa o ogniskach w punktach F, G i o stałej $2a > FG$ to zbiór takich punktów P płaszczyzny, że $PF + PG = 2a$. W poprzednim *deltoidzie* udowodniliśmy kilka własności elips (m.in. rys. 1). W tym numerze wykorzystamy elipsy do rozwiązania zadań olimpijskich. Zacznijmy od jeszcze kilku własności.

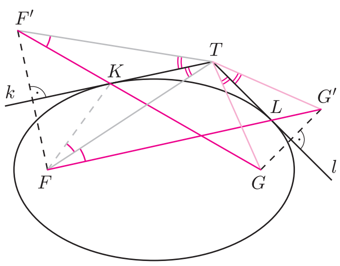


Rys. 1. Prosta k – styczna do elipsy w punkcie P, punkt G' – obraz G w symetrii względem k. Wtedy punkty F, P, G' leżą na jednej prostej i $FG' = 2a$.

Fakt. *Z punktu T poprowadzono proste k, l, styczne do elipsy o ogniskach F, G odpowiednio w punktach K, L. Wówczas $\sphericalangle FTK = \sphericalangle GTL$ i $\sphericalangle TFK = \sphericalangle TFL$.*

Dowód. Niech F', G' będą obrazami ognisk F, G w symetriach odpowiednio względem prostych k, l (rys. 2). Wtedy $TF' = TF$, $TG' = TG$ oraz, z rysunku 1, $FG' = F'G = 2a$. Wobec tego $\triangle F'TG \equiv \triangle FTG'$, zatem $\sphericalangle F'TG = \sphericalangle FTG'$. Stąd równość kątów $\sphericalangle FTF' = \sphericalangle GTG'$, czyli też ich połówek: $\sphericalangle FTK = \sphericalangle GTL$.

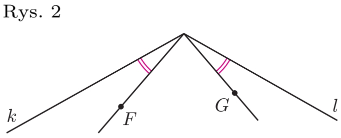
Kolejno z symetrii, ze współliniowości punktów F', K, G, z przystawania $\triangle F'TG$ i $\triangle FTG'$ oraz ze współliniowości punktów F, L, G', mamy $\sphericalangle TFK = \sphericalangle TF'K = \sphericalangle TF'G = \sphericalangle TFG' = \sphericalangle TFL$. □



Rys. 2

Ćwiczenia. Udowodnij, że:

(a) dla dowolnych punktów F, G, izogonalnie sprzężonych względem danych prostych k, l (rys. 3), istnieje elipsa o ogniskach F, G styczna do tych prostych,
(b) jeśli punkty F, G wewnątrz trójkąta są izogonalnie sprzężone względem każdej z dwóch par prostych zawierających boki, to są też sprzężone względem trzeciej pary,
(c) takie F, G są wtedy ogniskami pewnej elipsy wpisanej w ten trójkąt,
(d) w dowolny trójkąt ostrokątny można wpisać elipsę o ogniskach O, H, gdzie O to środek okręgu opisanego, a H to ortocentrum trójkąta.



Rys. 3. Jeśli kolorowe kąty są równe, to punkty F, G nazywa się *izogonalnie sprzężonymi* względem prostych k, l (mogą leżeć w różnych odległościach od wierzchołka).

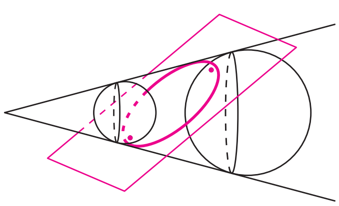
1. (LI OM) Dany jest trójkąt ABC, w którym $AC = BC$. Punkt F leży wewnątrz trójkąta ABC, przy czym $\sphericalangle FAB = \sphericalangle FBC$. Punkt M jest środkiem boku AB. Udowodnij, że $\sphericalangle AFM + \sphericalangle BFC = 180°$.

2. (XLVIII OM) Punkty F, G leżą wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC, przy czym $\sphericalangle ACF = \sphericalangle BCG$ i $\sphericalangle CAF = \sphericalangle BAG$. Punkty K, L, M są rzutami prostokątnymi punktu F odpowiednio na boki BC, CA, AB. Wykaż, że kąt KLM jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy punkt G jest punktem przecięcia wysokości trójkąta BKM.

Wskazówka. W poprzednim *deltoidzie* udowodniliśmy, że zbiór rzutów prostokątnych ogniska elipsy na proste styczne do tej elipsy to *okrąg opisany na elipsie*.

3. (LIV OM) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H. Druga sfera jest styczna do ściany ABC w punkcie O oraz jest styczna do płaszczyzn zawierających pozostałe ściany tego czworościanu w punktach, które do czworościanu nie należą. Wykaż, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

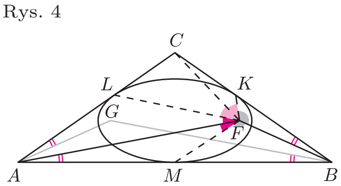
Wskazówka. Elipsa to przekrój stożka odpowiednio nachyloną płaszczyzną (rys. 4). Ogniskami są punkty styczności tej płaszczyzny do sfer „wpisanych” w stożek.



Rys. 4

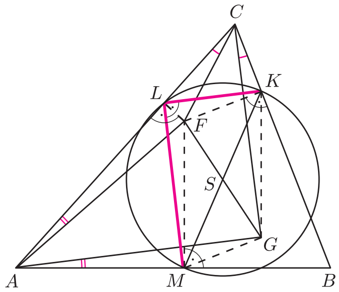
Rozwiązania

R1. Niech G będzie obrazem F w symetrii względem prostej CM (rys. 5). Wtedy $\sphericalangle FAB = \sphericalangle FBC = \sphericalangle GAC$ oraz $\sphericalangle FBC = \sphericalangle FAB = \sphericalangle GBA$. Z ćwiczenia (c) istnieje więc elipsa o ogniskach F, G, wpisana w trójkąt ABC. Jest ona styczna do boku AB w punkcie M i do boków BC, AC odpowiednio w K, L. Z Faktu, $\sphericalangle AFM = \sphericalangle AFL$, $\sphericalangle BFK = \sphericalangle BFM$, $\sphericalangle CFK = \sphericalangle CFL$. Suma tych sześciu kątów daje kąt pełny $360°$, zatem $\sphericalangle AFM + \sphericalangle BFK + \sphericalangle CFK = 180°$, co kończy dowód. □



Rys. 5

R2. Z ćwiczenia (c) punkty F, G są ogniskami pewnej elipsy wpisanej w trójkąt ABC (rys. 6). Na mocy wskazówki punkty K, L, M leżą na okręgu o środku w środku S odcinka FG. Kąt KLM jest prosty $\Leftrightarrow$ KM jest średnicą tego okręgu $\Leftrightarrow$ S jest środkiem KM $\Leftrightarrow$ $KFMG$ jest równoległobokiem $\Leftrightarrow$ $KG \parallel FM \perp AB$ oraz $MG \parallel FK \perp BC$ $\Leftrightarrow$ G jest punktem przecięcia wysokości trójkąta BKM. □



Rys. 6