

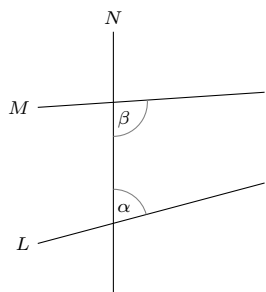
# Jaki jest kształt Wszechświata?

Jarosław GÓRNICKI\*

\* Wydział Matematyki i Fizyki  
Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

W stosunku do wielkości Ziemi wszystkie ziemskie nierówności (łańcuchy górskie, doliny) to znikome, zaniedbywalne zniekształcenia. Ponieważ w naszej skali nasze bliskie otoczenie przypomina płaską powierzchnię, więc nie powinno nas dziwić, że pierwsze geometryczne rozważania dotyczyły płaszczyzny.

Kulminacją geometrycznych osiągnięć antycznego świata są *Elementy* Euklidesa napisane w III wieku p.n.e. Euklides wykazał, jak można na płaszczyźnie użyć pięciu aksjomatów do systematycznego wywnioskowania z nich dużego zbioru twierdzeń geometrycznych. Oto aksjomaty Euklidesa:

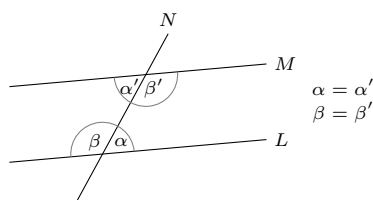


Rys. 1

- I. Od dowolnego punktu do dowolnego punktu można poprowadzić prostą.
- II. Ograniczoną prostą można w sposób ciągły przedłużyć do prostej.
- III. Z dowolnego środka dowolnym promieniem można zakreślić okrąg.
- IV. Wszystkie kąty proste są równe.
- V. Jeśli prosta padająca na dwie proste tworzy po jednej stronie kąty wewnętrzne w sumie mniejsze od dwóch kątów prostych, to te dwie proste przedłużone nieskończenie przetną się po tej stronie (rys. 1).

Piąty aksjomat Euklidesa ma także następujące sformułowanie (John Playfair, 1785 r.).

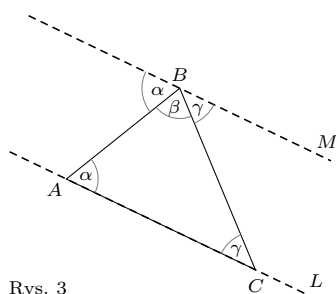
- V'. Przez każdy punkt poza prostą przechodzi dokładnie jedna prosta z nią rozłączna.



Rys. 2

Jako przykład wykorzystania aksjomatów uzasadnimy dobrze znaną na płaszczyźnie obserwację: suma miar kątów trójkąta równa się  $180^\circ$ .

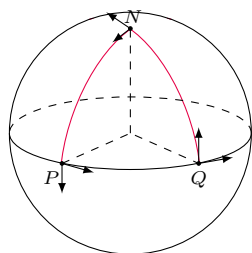
W pierwszym kroku wykazemy, że jeśli prosta  $N$  przecina dwie proste równoległe  $M$  i  $L$ , to naprzemianległe kąty są równe (rys. 2). Z aksjomatu V  $\alpha + \beta' = \alpha + (180^\circ - \alpha')$  musi być równe  $180^\circ$ , bo w przeciwnym wypadku proste  $M$  i  $L$  przecinają się. Stąd  $\alpha = \alpha'$ . Analogicznie  $\beta = \beta'$ .



Rys. 3

Niech będzie dany trójkąt  $\triangle ABC$  o kątach  $\alpha, \beta, \gamma$  (rys. 3). Wobec II aksjomatu prostą łączącą  $A$  i  $C$  możemy przedłużyć do prostej  $L$ . Z aksjomatu V' (postulatu o równoległych) istnieje prosta  $M$  przechodząca przez punkt  $B$ , która nie przecina prostej  $L$ . Wówczas z dowiedzionej już części  $\alpha = \alpha'$  i  $\gamma = \gamma'$ , więc  $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta + \gamma' = 180^\circ$ .

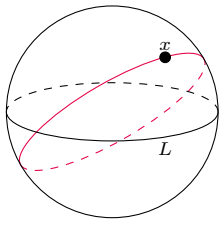
Najwięcej kontrowersji budził V aksjomat Euklidesa. Przez stulecia próbowano wywnioskować go z czterech pozostałych aksjomatów. I choć próby te kończyły się niepowodzeniem (na końcu artykułu przedstawiamy kilka z nich), to nikt nie był pewien, czy jakiś młody geniusz za sto czy dwieście lat nie będzie miał wspaniałego nowego pomysłu, który w końcu doprowadzi do poszukiwanego dowodu. Gdyby udało się stworzyć taki model geometrii, w którym pierwsze cztery aksjomaty byłyby prawdziwe, a V aksjomat nie byłby spełniony, to sprawa byłaby definitywnie wyjaśniona – V aksjomat byłby niezależny od czterech pozostałych. Ten problem okazał się trudny. Czy gdzieś istnieją trójkąty o sumie miar kątów nie dających  $180^\circ$ ? Jeszcze w XVIII wieku Immanuel Kant w *Krytyce czystego rozumu* (1781 r.) głosił, że geometria euklidesowa jest wiedzą *a priori* – jest nam dana wraz z życiem. Kant się mylił!



Rys. 4

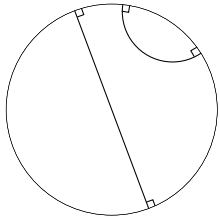
Więcej o niepłaskości Ziemi można przeczytać w artykułach Michała Miśkiewicza w  $\Delta_{16}^4$  i  $\Delta_{16}^{10}$ .

Dalekie podróże skłaniały ludzi do zastanawiania się nad tym, czy Ziemia jest płaska? Jak to rozstrzygnąć, pozostając stale na Ziemi? Obserwacje zaćmień Księżyca i cienia, jaki pozostawia na nim Ziemia, nie są przekonujące. Postąpimy inaczej, z bieguna północnego  $N$  idziemy do równika  $a$  km do punktu  $P$  (rys. 4). Na równiku skręcamy pod kątem prostym na wschód i idziemy wzdłuż równika  $a$  km do punktu  $Q$ , po czym pod kątem prostym skręcamy na północ i po  $a$  km znajdujemy się na biegunie  $N$ , gdzie wektor kierunku naszego marszu jest teraz prostopadły do wektora kierunku naszego startu. Okazało się, że w ten sposób wytyczyliśmy na Ziemi trójkąt  $\triangle NPQ$ , którego suma miar kątów jest równa  $270^\circ$ . O takiej powierzchni (na której sumy miar kątów w trójkącie przekraczają  $180^\circ$ ) mówimy, że ma *krzywiznę dodatnią*. Zatem Ziemia nie jest płaska!

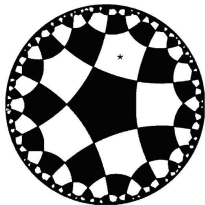


Rys. 5

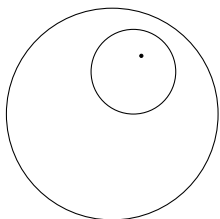
Na przykładzie sfery świetnie widać, że z lokalnych obserwacji (doświadczeń) nie zawsze można wyciągnąć trafne wnioski o zjawisku globalnym.



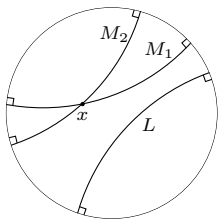
Rys. 6. Typowe proste w dysku hiperbolicznym



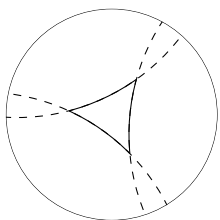
Rys. 7. Podział dysku hiperbolicznego za pomocą pięciokątów. Wyróżniony gwiazdką pięciokąt ma boki takiej samej długości jak pięciokąt centralny i takie samo pole



Rys. 8



Rys. 9



Rys. 10

Jak na takiej powierzchni (sferze) zachowują się aksjomaty Euklidesa? Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy określić na tej powierzchni pojęcie prostej. Na płaszczyźnie prosta łącząca punkty  $A$  i  $B$  charakteryzuje się tym, że jest najkrótszą ścieżką łączącą te punkty. Gdy punkty  $A$  i  $B$  umieścimy na sferze, to najkrótszym odcinkiem je łączącym będzie krótszy fragment koła wielkiego, który powstanie z przecięcia sfery przez płaszczyznę, jaką wyznaczają punkty  $A$ ,  $B$  i środek sfery. Na przykład najkrótsza droga łącząca Paryż i Vancouver przebiega przez okolice bieguna północnego.

Skoro prostymi na sferze są koła wielkie, to łatwo widać, że na sferze V aksjomat Euklidesa jest fałszywy. Niech  $L$  będzie równikiem Ziemi i  $x$  punktem na półkuli północnej. Jakiemukolwiek kołu wielkiemu przechodzącemu przez punkt  $x$  będzie w połowie leżeć na półkuli północnej, a w połowie na półkuli południowej, przecinając równik w dwóch (!) antypodycznych punktach (rys. 5). Innymi słowy, na Ziemi nie ma prostej przechodzącej przez punkt  $x$ , która nie przecina prostej  $L$ . Niestety ten model geometrii (zwany *geometrią sferyczną*) nie pozwala na rozstrzygnięcie, czy V aksjomat jest niezależny od czterech pozostałych aksjomatów. Powód jest trywialny. Nie wszystkie pierwsze cztery aksjomaty Euklidesa są prawdziwe w geometrii sferycznej. Na przykład sfera nie zawiera okręgów o dowolnie dużym promieniu (aksjomat III), punkty antypodyczne (biegun północny i południowy) łączy nieskończenie wiele prostych, a na płaszczyźnie przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta (podważa to I aksjomat).

Potrzebujemy innej geometrii. Z listów Gaussa wynika, że około 1817 roku uświadomił on sobie, że można zbudować logicznie spójną geometrię, różną od euklidesowej (z odrzuconym V aksjomatem), ale swoich przemyśleń nie ogłosił. Zrobili to niezależnie od siebie Nikołaj Łobaczewski (1829 r.) i János Bolyai (1832 r.).

Na rysunku 6 przedstawiamy model dwuwymiarowej *geometrii hiperbolicznej* odkryty przez Eugenio Beltramiego w 1868 roku (14 lat później podał go również Henri Poincaré). Zrozumienie tego modelu wymaga nie tylko zdefiniowania linii prostej, ale również obowiązującej w nim odległości. W tym modelu przestrzeń jest przedstawiona jako wnętrze koła (bez brzegu). Prostymi są średnice lub łuki okręgów euklidesowych przecinające brzeg koła pod kątem prostym (rys. 6). Proste są wyznaczone jednoznacznie przez dwa punkty lub przez punkt i koniec, lub przez dwa końce. Odległości stają się większe (w porównaniu do tego, jak wyglądają), gdy zbliżamy się do brzegu tak, że brzeg jest nieskończenie daleko od centrum. W rezultacie najkrótsza droga między dwoma punktami ma tendencję do odchylania się w kierunku centrum i, jak już mówiliśmy, jest łukiem okręgu euklidesowego, który przecina brzeg pod kątem prostym (rys. 7).

Dodatkowo w tym modelu koła są zawsze reprezentowane przez koła euklidesowe, ale mają przesunięte środki (rys. 8), ich promienie mogą być dowolnie duże, wówczas koło prawie dotyka brzegu modelu. Kąty, w tym „prostokątność”, są w tym modelu wiernie przeniesione z płaszczyzny euklidesowej. Oznacza to, że w takiej przestrzeni spełnione są wszystkie pierwsze cztery aksjomaty Euklidesa. A co z V aksjomatem? Otóż w modelu geometrii hiperbolicznej V aksjomat Euklidesa jest fałszywy, co widać na rysunku 9. Proste  $M_1$  i  $M_2$  przecinają się w punkcie  $x$ , ale żadna z nich nie przecina prostej  $L$ . Zatem w modelu geometrii hiperbolicznej istnieją dwie proste przechodzące przez punkt  $x$  (tak naprawdę nieskończenie wiele), które nie przecinają prostej  $L$ . Pokazaliśmy w ten sposób, że Euklides miał rację, przyjmując V aksjomat, gdyż jest on niezależny od czterech pozostałych aksjomatów! Teraz już wiemy, że wszelkie próby wyprowadzenia V aksjomatu Euklidesa z czterech pozostałych aksjomatów z góry były skazane na niepowodzenie.

Ponadto w geometrii hiperbolicznej suma miar kątów trójkąta jest mniejsza niż  $180^\circ$  (rys. 10). O takiej powierzchni mówimy, że ma *krzywiznę ujemną*.

W ten oto sposób odkryliśmy, że istnieją różne geometrie i żadna z nich nie jest bardziej uprzywilejowana od innych. 10 czerwca 1854 roku Bernhard Riemann, mając 28 lat, w swoim wykładzie habilitacyjnym *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii* poszedł jeszcze dalej. Umieszczając obserwatora wewnątrz przestrzeni (wielowymiarowej rozmaitości), stwierdził, że geometria przestrzeni może się zmieniać od punktu, tu być hiperboliczną, tam euklidesową, a gdzie indziej sferyczną.

### Próby dowodu V aksjomatu Euklidesa:

- (1) Niech  $y$  będzie innym punktem po tej samej stronie prostej  $L$  co punkt  $x$  i w tej samej od niej odległości. Połącz  $x$  z  $y$  prostą (I aksjomat), a następnie przedłuż tę ograniczoną prostą do prostej  $M$  (II aksjomat). Wtedy prosta  $M$  nie przecina prostej  $L$ .
- (2) Niech prosta  $M$  będzie złożona ze wszystkich punktów po tej samej stronie prostej  $L$  co punkt  $x$  i będących od niej w tej samej odległości. Otrzymana prosta nie przecina prostej  $L$ .
- (3) Punkt na płaszczyźnie kartezjańskiej można zapisać za pomocą współrzędnych. Prosta (nie pionowa)  $L$  ma równanie  $y = mx + c$ . Zmieniając  $c$ , możemy przesunąć prostą  $L$  w górę lub w dół. Żadna z tak otrzymanych prostych nie może się przecinać i każdy punkt należy do dokładnie jednej prostej.

Dzisiaj za sprawą ogólnej teorii względności Alberta Einsteina (1916 r.) i potwierdzającej ją obserwacji Arthura Eddingtona z roku 1919 przyjmujemy, że otaczająca nas przestrzeń (dokładniej czasoprzestrzeń) jest zakrzywiona, choć możliwe, że tego typu zakrzywienia są tylko niewielkimi perturbacjami znacznie większego i bardziej symetrycznego kształtu.

Tytułowe pytanie o kształt Wszechświata jest jednym z wielkich otwartych problemów astronomii (kosmologii) – czy wielkoskalowy kształt Wszechświata, gdyby wyprostować luki, ugięcia wynikające z obecności gwiazd, galaktyk, czarnych dziur itp., nadal byłby zakrzywiony jak wielka kula, czy też byłby płaski (jak wodne łóżko), a może jest on bardziej skomplikowaną wielowymiarową rozmaitością o ujemnej krzywiznie. Może Ty masz pomysł, jak to rozstrzygnąć, Czytelniku?

## Czułość funkcji logicznych, część 2

Mariusz ZAJĄC\*

\* Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

[1] Hao Huang, *Induced subgraphs of hypercubes and a proof of the Sensitivity Conjecture*, [arxiv.org/abs/1907.00847](https://arxiv.org/abs/1907.00847).

W pierwszej części artykułu ( $\Delta_{20}^7$ ) omówiliśmy pojęcia funkcji logicznej, jej czułości i przedstawiliśmy, na razie bez dowodów, pewne związane z nimi twierdzenia, udowodnione w pracy [1].

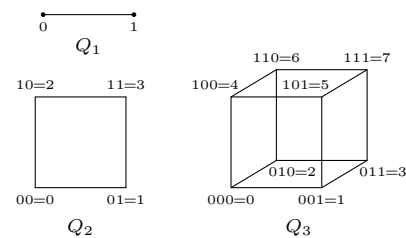
Celem drugiej części jest przedstawienie owych dowodów w wersji nieco uproszczonej w stosunku do oryginalnej pracy [1], ale wciąż wymagającej znajomości podstaw algebry liniowej, w tym mnożenia macierzy i pewnej wiedzy o wymiarze przestrzeni liniowej.

Niech  $n$  będzie dowolną dodatnią liczbą całkowitą i niech  $N = 2^n$ . Zapiszmy elementy zbioru  $V_n = \{0, 1, \dots, N - 1\}$  w układzie dwójkowym (uzupełniając w miarę potrzeby nieznaczącymi początkowymi zerami, tak by każda liczba miała dokładnie  $n$  cyfr) i przedstawmy je graficznie w ten sposób, że elementy  $V_n$  (zwane wierzchołkami) będą punktami, a odcinki (zwane krawędziami) połączą pary wierzchołków różniące się w układzie dwójkowym tylko jedną cyfrą. Uzyskany graf nazwiemy  **$n$ -wymiarową kostką  $Q_n$**  (nazwa wiąże się niewątpliwie z podobieństwem  $Q_3$  do szkieletu sześciangu, czyli standardowej kostki do gry).

Spróbujmy przezwyciężyć fakt, że bezpośrednio odczuwamy istnienie tylko trzech wymiarów, spoglądając na kostki rekurencyjnie:  $Q_1$  to dwa punkty połączone odcinkiem,  $Q_2$  to dwa odcinki, np. dolny i górny, połączone dwiema pionowymi krawędziami,  $Q_3$  to dwie kopie  $Q_2$ , np. dolny i górny kwadrat, połączone czterema pionowymi krawędziami,  $\dots$ ,  $Q_{m+1}$  to dwie kopie  $Q_m$ , połączone  $2^m$  krawędziami i tak dalej.

Zapowiedziane pod koniec pierwszej części twierdzenie (jeśli ponad połowę wierzchołków  $n$ -wymiarowej kostki zajmują mrówki, to któraś z nich ma co najmniej  $\sqrt{n}$  sąsiadek) możemy sformułować w następujący równoważny sposób.

**Twierdzenie** (Huang [1]). *Jeśli wyróżnimy niektóre wierzchołki  $n$ -wymiarowej kostki  $Q_n$ , czyli wybierzemy podzbiór  $W \subseteq V_n$ , przy zachowaniu warunku, że każdy element  $W$  ma mieć mniej niż  $\sqrt{n}$  sąsiadów należących do  $W$ , to wyróżnione wierzchołki stanowią będą co najwyżej połowę wszystkich wierzchołków kostki, czyli  $|W| \leq N/2$ .*



Rys. 1. Na przykład w  $Q_{12}$  połączone będą między innymi  $x = 859 = 001101011011_2$  i  $y = 843 = 001101001011_2$

W terminologii teorii grafów twierdzenie Huang brzmi: *każdy indukowany podgraf  $G \subseteq Q_n$  spełnia  $\Delta(G) < \sqrt{n} \Rightarrow |V(G)| \leq 2^{n-1}$ . Dużo krócej, ale trzeba wpiერw wyjaśnić, że  $V(G)$  to zbiór wierzchołków grafu  $G$ ,  $\Delta(G)$  to największy stopień wierzchołka (stopień to z kolei liczba krawędzi o końcu w danym wierzchołku), a podgraf indukowany oznacza pewne wierzchołki wraz ze wszystkimi łączącymi je krawędziami  $Q_n$ .*