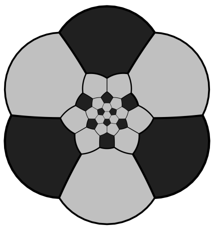
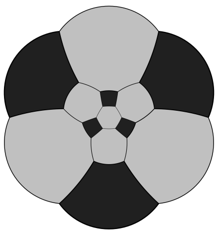
Zrób to sam: płaszczyzna hiperboliczna z papieru

*Eryk KOPCZYŃSKI**

*Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Od czasów starożytnych Greków wiadomo, że jest pięć brył foremnych: czworościan, sześcian, ośmiościan, dwunastościan i dwudziestościan. W każdym wierzchołku może się spotkać 3, 4 lub 5 trójkątów, 3 czworokąty lub 3 pięciokąty. Dużo później skompletowano wielościany półforemne, jednak i tu w żadnym z nich nie pojawia się siedmiokąt. Spróbujmy dać mu szansę...

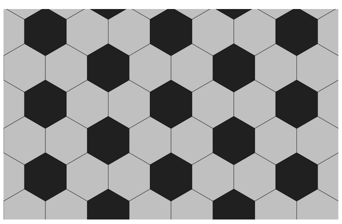




Wyobraźmy sobie, że rysujemy krawędzie wielościanu na przezroczystej sferze, następnie przykładamy oko do tej sfery. To, co widzimy, nazywa się *rzutem stereograficznym*.

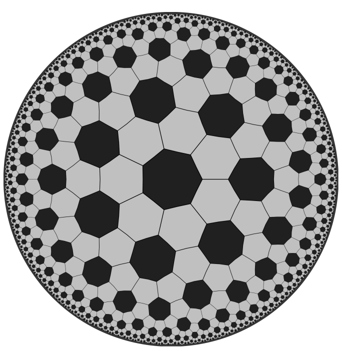
Spójrzmy na klasyczną piłkę nożną. Jest ona wielościanem, którego ścianami jest 12 czarnych pięciokątów i 20 białych sześciokątów. W każdym wierzchołku stykają się dwa białe sześciokąty i jeden czarny pięciokąt. Na rysunku obok piłka nożna przedstawiona jest w *rzucie stereograficznym*. Co by było, gdybyśmy zastąpili pięciokąt inną figurą?

W tej piłce pięciokąt można zastąpić kwadratem lub trójkątem. Chcąc stworzyć taki wielościan z papieru, można wyciąć wszystkie potrzebne białe i czarne ściany, a następnie odpowiednio je połączyć. Ta metoda wymaga jednak dużo wycinania i klejenia, czego możemy sobie oszczędzić, tworząc siatkę docelowego wielościanu (czyli niektóre ze ścian od razu będą połączone). Taki wielościan można przedstawić jak na rysunku obok, pamiętając o tym, że jedna ze ścian (ta, przez którą patrzymy do wewnątrz sfery) nie jest na nim przedstawiona. Gdy będziemy tworzyć siatkę zgodnie z zasadami, że dwie białe i jedna czarna figura mają spotkać się w każdym wierzchołku, to otrzymamy właśnie tę bryłę, o którą nam chodziło.

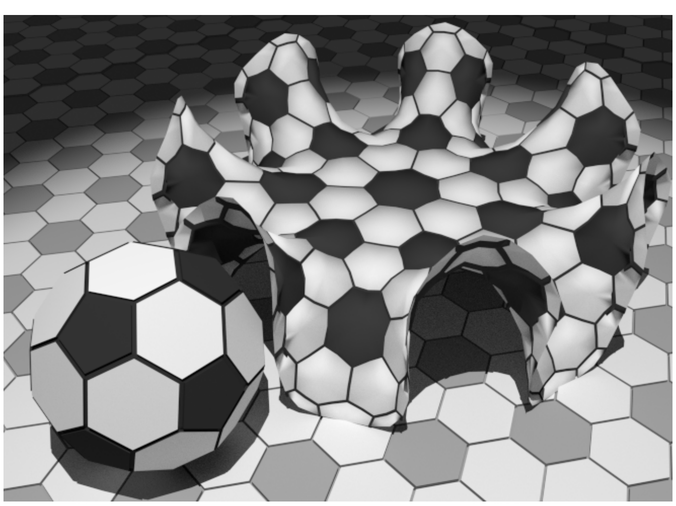


Gdy będziemy chcieli w piłce nożnej zamienić pięciokąty na sześciokąty, to łatwo się zorientujemy, że nie istnieje wielościan, którego ścianami są same sześciokąty. Oczywiście można wykonać konstrukcję z papieru, otrzymamy wtedy coś takiego jak obok.

Pójdźmy dalej i zamieńmy czarne figury na siedmiokąty.



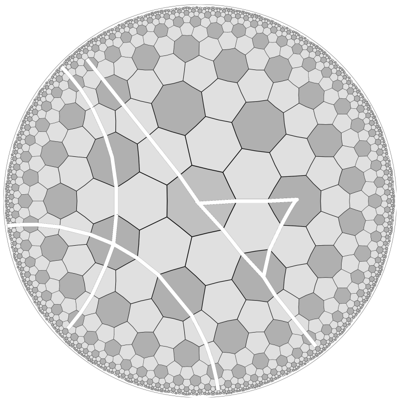
Przed rozpoczęciem sklejania warto rozrysować na kartce strukturę czegoś takiego. Wynik przedstawiony jest na rysunku obok. Podobnie jak w przypadku czarnych sześciokątów, nasza konstrukcja nie będzie się składała w wielościan. Nie będzie się także składała w płaszczyznę. Da się ją jednak wykonać, jeśli ograniczymy się na przykład do 50 figur w odległości co najwyżej 3 od środkowego siedmiokąta. Konstrukcja siatki jest trochę trudniejsza niż w przypadku wielościanów. Jeden czarny sześciokąt i 2 białe idealnie mieściły się wokół wierzchołka, natomiast 1 czarny pięciokąt i 2 białe sześciokąty nie tylko się mieściły, ale także zostawiały trochę miejsca (które należało wyciąć i skleić). Tutaj czarny siedmiokąt i 2 białe sześciokąty już się nie mieszczą. Nie jest to jednak dużym problemem, blok techniczny jest na tyle giętki, by lekko wyginając papier dało się taką konstrukcję wykonać, i jednocześnie na tyle sztywny, by zachowywała ona swój kształt. Taką atrakcyjną konstrukcję niestety dosyć trudno przedstawić na dwuwymiarowych zdjęciach czy filmach – lepiej pobawić się samemu. Pora wyjaśnić, co to właściwie jest.



Kiedy w „piłce" czarne były sześciokąty, to otrzymaliśmy płaszczyznę. Dwudziestościan przycięty (z czarnymi pięciokątami) przypomina kulę – co widać na przykładzie piłki nożnej. Wersje z kwadratami i trójkątami również przypominają kulę, ale już nie tak dobrze. Nasza siedmiokątna konstrukcja również przybliża pewną powierzchnię.

Przykładowa gotowa siatka konstrukcji z siedmiokątami: `www.mimuw.edu.pl/~erykk/paper/`. Polecamy wydrukować na czterech kartkach A4. Do szybkiego i mocnego „sklejania" można użyć zszywacza.

Piąty postulat Euklidesa: *Jeżeli prosta przecina dwie proste, tworząc dwa kąty wewnętrzne po tej samej stronie, o sumie mniejszej niż dwa kąty proste, to te dwie proste przecinają się po tej stronie, po której znajdują się owe kąty wewnętrzne.*



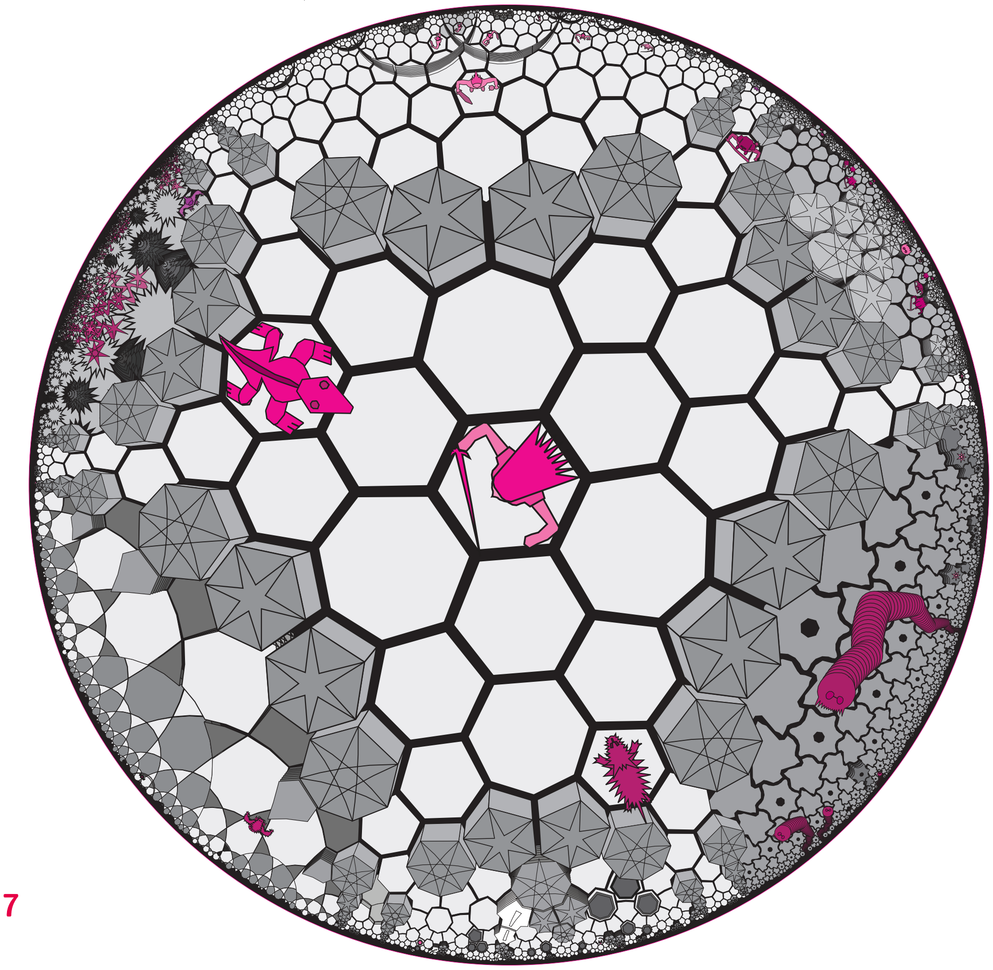
Nasze rysunki przedstawiają płaszczyznę hiperboliczną w modelu Poincaré, który jest odpowiednikiem rzutu stereograficznego sfery. W tym modelu cała płaszczyzna hiperboliczna mieści się w dysku, proste przedstawione są jako łuki okręgów lub odcinki przecinające brzeg dysku pod kątem prostym.

Jakie własności ma ta powierzchnia? By to zbadać, spróbujmy rysować na niej linie proste – jako że mamy tylko przybliżenie, nie możemy prostych rysować gdziekolwiek. Jeśli zaczniemy w środku siedmiokąta i narysujemy linię prostą w kierunku wierzchołka lub środka krawędzi, to jest dosyć jasne, jak będziemy musieli ją kontynuować. Dla łatwiejszego zrozumienia, na rysunku obok rysujemy odcinki, używając naszej dwuwymiarowej reprezentacji. Z trzech odcinków łączących środki trzech najbliżej leżących siedmiokątów możemy stworzyć trójkąt i obliczyć sumę jego kątów: $3 \cdot 360°/7 < 180°$. Możemy też narysować prostą, nazwijmy ją L, i jakiś punkt poza nią. Okaże się, że przez ten punkt można poprowadzić różne proste nieprzecinające L – można to zrobić na kilka znacząco różnych sposobów. Z tego wynika, że ta powierzchnia różni się od płaszczyzny, gdzie suma kątów w trójkącie wynosi 180° i przez punkt poza prostą L można przeprowadzić tylko jedną prostą do niej równoległą. Ta powierzchnia różni się także znacząco od sfery, gdzie suma kątów w trójkącie jest zawsze większa niż 180° i proste równoległe nie istnieją – równoleżniki nie są prostymi.

Geometria przybliżana przez konstrukcję z siedmiokątami jest nazywana *geometrią hiperboliczną*, a jej odkrycie jest jednym z najciekawszych, najbardziej zaskakujących fragmentów historii matematyki. Spełnia ona wszystkie postulaty geometrii Euklidesa oprócz piątego. Euklides, podobnie jak wielu innych matematyków przez 2000 lat, wierzył, że piąty postulat da się wyprowadzić z pozostałych. Nasza konstrukcja jest dowodem, że nie da się tego zrobić.

Wyobraźmy sobie, że spacerujemy po takiej konstrukcji i w każdym kroku możemy przejść na nowe pole, o ile ma ono wspólną krawędź z tym, na którym obecnie się znajdujemy. Można obliczyć, że liczba figur w odległości co najwyżej d kroków od wybranego siedmiokąta zależy wykładniczo od d. Jako że wartości funkcji postaci a^d są zawsze od pewnego momentu większe niż d^3 (czy dowolny inny wielomian zmiennej d), nie jest możliwe włożenie całej płaszczyzny hiperbolicznej w przestrzeń euklidesową – po prostu a^d figur nie mieści się w kuli o promieniu d w przestrzeni trójwymiarowej, przynajmniej jeśli robimy model z papieru (Hilbert wykazał, że nie można tego zrobić również z abstrakcyjną płaszczyzną hiperboliczną).

Zachęcam do wirtualnego spaceru po płaszczyźnie hiperbolicznej, którego można doświadczyć w grze HyperRogue – gra toczy się na opisanej powyżej siatce z sześciokątów i siedmiokątów. Gra ma także opcję tworzenia gotowej do wycięcia siatki opisanego w artykule modelu (na podstawie sceny z gry) oraz możliwość tworzenia trójwymiarowego komputerowego modelu tej powierzchni.



Gra HyperRogue:
`www.roguetemple.com/z/hyper/online.php`
Zwiastun gry:
`www.youtube.com/watch?v=xAFrKKApHTY`

Głównymi twórcami gry HyperRogue są autor tego artykułu oraz Dorota Celińska-Kopczyńska (autorka tekstu, który znajduje się na kolejnej stronie).