Zrób to sam: płaszczyzna hiperboliczna szydełkiem

*Dorota CELIŃSKA-KOPCZYŃSKA**

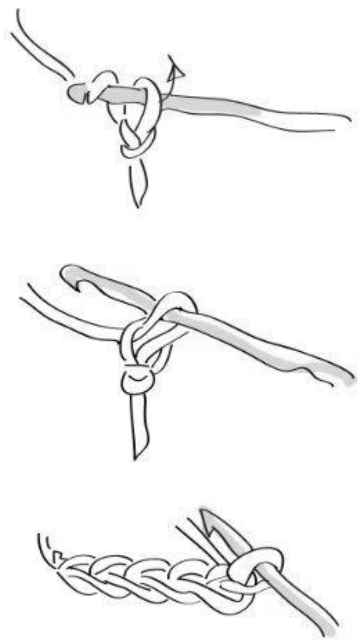
* Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Stworzenie papierowego modelu płaszczyzny hiperbolicznej (patrz artykuł na stronie 6) wymaga nieco umiejętności manualnych. Papierowy model, niestety, ma bardzo poważną wadę: jest podatny na uszkodzenia. Dlatego prezentujemy konkurencyjny sposób produkcji płaszczyzny hiperbolicznej, zaproponowany po raz pierwszy przez Dainę Taiminę w 2001 roku. Pani Taimina, obserwując uczestników warsztatów, jak cierpliwie łączą papier taśmą klejącą, wymyśliła sposób na porządną i trwałą płaszczyznę hiperboliczną. Ten sposób wymaga szydełka, podstawowej umiejętności liczenia i znajomości zaledwie dwóch ściegów: łańcuszka i półsłupka.

Czytelników, którzy zaczęli kalkulować, „ile to będzie kosztowało?”, chcemy pocieszyć, że projekt tak samo dobrze będzie wyglądać, gdy użyjemy jakiejś starej, zabłąkanej w domu włóczki albo kordonka czy materiału z recyklingu, np. sprutego swetra, który już od dawna leżał nikomu niepotrzebny. Jeśli szydełka nie uda się znaleźć w domu (ani pożyczyć), to ich ceny nie są zatrważające: nie więcej niż 5–10 zł.

Co będzie potrzebne? Przygotuj materiały: włóczkę lub kordonek i wygodne szydełko dostosowane do grubości nici. Jest to ważny krok, ale drobne błędy nie przekreślą powodzenia projektu. Jeśli użyjesz zbyt grubego szydełka, nic poważnego się nie stanie – ściegi będą luźniejsze, a robótka bardziej lejąca. Gdy użyjesz zbyt cienkiego, być może nie będziesz w ogóle w stanie tworzyć. Zauważysz to bardzo szybko. Ogólnie im grubsza nitka, tym grubsze szydełko: dla popularnej, cienkiej włóczki akrylowej szydełko 4 mm będzie prawdopodobnie bezpieczną opcją. Niektórzy producenci włóczek podają na opakowaniu sugerowany rozmiar szydełka – warto na to zwrócić uwagę, jeśli zdecydujemy się na samodzielny zakup materiałów. Pożyczając szydełko od kogoś doświadczonego, na pewno można liczyć na jego rady.

Nie ma większego znaczenia, w jakiej pozycji trzymamy szydełko – ma być nam wygodnie. Można trzymać je jak druty lub ołówek. Osoby praworęczne najczęściej trzymają szydełko w prawej ręce, osoby leworęczne w lewej. Przeciwna ręka służy do kontroli napięcia nici i trzymania robótki.



(a)

(b)

(c)

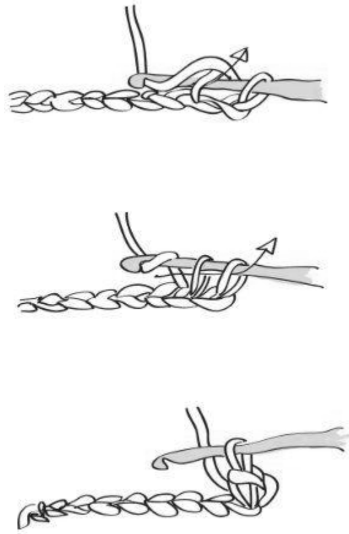
Rys. 1. Oczko łańcuszka

Oczko łańcuszka. Wszystkie robótki szydełkowe zaczynają się od wykonania początkowego łańcuszka. Stanowi on bazę. Robimy małą pętelkę, taką żeby swobodnie przechodził przez nią haczyk szydełka, ale jednocześnie nie za dużą. Przekładamy haczyk szydełka przez pętelkę i nawijamy nitkę na szydełko w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 1a). Przeciągamy nawiniętą nitkę szydełkiem przez pętelkę, formując nową (oczko) (rys. 1b). Nie zaciskamy poprzedniej pętelki (oczka), później będziemy się w nią wbijać. Aby otrzymać łańcuszek początkowy, przerabiamy odpowiednią liczbę oczek (rys. 1c). Staramy się, żeby były równe.

Uwaga dla osób leworęcznych: weź lusterko i przystaw je do rysunku z instrukcją, tak aby w lustrzanym odbiciu było widać sposób przerabiania kolejnych ściegów.

Półsłupek. Mając łańcuszek oczekiwanej długości, dodajemy jeszcze jedno oczko. Będziemy tak robić zawsze przy odwracaniu robótki lub przechodzeniu do kolejnego rzędu. Wkłuwamy szydełko w robótkę, w drugie oczko początkowego łańcuszka, licząc od strony szydełka. Pierwsze oczko leży na szydełku. Nawijamy nitkę na szydełko i przeciągamy ją przez robótkę (pierwszą pętelkę zostawiamy na razie w spokoju) (rys. 2a). Znowu nawijamy nitkę i tym razem przeciągamy ją przez obie pętelki na szydełku (rys. 2b). Gratulacje, pierwszy półsłupek gotowy (rys. 2c). Żeby zrobić kolejny, wkłuwamy szydełko w następne oczko i powtarzamy sekwencję nawijanie-przeciąganie-nawijanie-przeciąganie. Gdy dojdziemy do końca rzędu, dodajemy zwykłe oczko łańcuszka, a robótkę odwracamy. Od drugiego rzędu zauważymy, że na wierzchu naszych półsłupków znajdują się pętelki – w zależności od wybranego wzoru możemy wbijać się w przednią część pętelki, tylną lub pod obydwoma.

Gdyby powyższy opis był niewystarczający, zachęcamy do poproszenia o pomoc kogoś znajomego, po kim spodziewamy się, że potrafi szydełkować. Jeśli Czytelnik nie wykazywał wcześniej zainteresowania robótkami ręcznymi, to nie uniknie zapewne (co najmniej) lekkiego zaskoczenia osoby pytanej. W najgorszym wypadku można powiedzieć, że zamierza się zrobić szalik (skoro niektórzy noszą zrobioną na drutach butelkę Kleina jako czapkę, to kto nam broni założyć płaszczyznę hiperboliczną na szyję?). Jeśli jednak osoba, którą chcemy poprosić o pomoc, nie reaguje na tematy matematyczne agresywnie


(a)
(b)
(c)
Rys. 2 Półsłupek

ani alergicznie, warto wziąć ten numer *Delty* i pouczyć się razem. W końcu matematyka lepiej smakuje w grupie.

Algorytm. Te kilka rzędów, które opisaliśmy jako próbkę do nauki ściegów, nie tworzy jeszcze płaszczyzny hiperbolicznej. Uważny Czytelnik dostrzeże, że przy starannym przerabianiu każdego oczka i pamiętaniu o dodaniu jednego na końcu rzędu tworzy nam się zwykły, euklidesowy prostokąt. Dlatego teraz, po przerobieniu bazowego łańcuszka, zwiększajmy liczbę półsłupków co n. Przyjmijmy, że nasze n będzie równe 5. Zacznijmy od małego łańcuszka, np. 20 oczek (+oczko na potrzeby przejścia do nowego rzędu). Zróbmy standardowe 4 półsłupki, wbijając się w kolejne oczka. Piąty półsłupek zróbmy, wbijając się w tę samą pętelkę, co czwarty. Powtarzajmy te dwa kroki do końca rzędu. Oznacza to, że co piąty półsłupek będzie robiony „do tyłu" robótki. Na koniec rzędu dodajmy jedno oczko i odwróćmy robótkę. W początkowym łańcuszku mieliśmy 20 oczek, po pierwszym rzędzie jest ich już 26. Procedurę powtarzamy w kolejnych rzędach. Gdy znudzi nam się robótka, możemy obciąć nitkę, przeciągnąć ją przez leżącą na szydełku pętelkę i zacisnąć, żeby zakończyć.

Czemu to działa? W każdym rzędzie dodajemy coraz więcej oczek – zasada jest zbliżona do opisanej wcześniej konstrukcji papierowej. Bierzemy konstrukcję płaszczyzny euklidesowej i dodajemy element (tam – bok czarnej figury, tu – półsłupek) tak, by twór nie mieścił się na płaszczyźnie i musiał się zakrzywić; element ten dodajemy w regularny sposób, dzięki czemu otrzymujemy powierzchnię o stałej krzywiźnie. Stosunek liczby oczek pomiędzy rzędami pozostaje zawsze ten sam: n do $n+1$. Po kilku(nastu) rzędach, w zależności od wybranego n, nasza robótka przestaje się wygodnie mieścić w trójwymiarowym, euklidesowym świecie. Dodawanie oczek to również powód, dla którego szydełko jest wygodniejsze od drutów. Przy korzystaniu z drutów, robótka musi zawsze na jednym z nich się opierać, co stanowi problem przy wykładniczym zwiększaniu się liczby oczek.

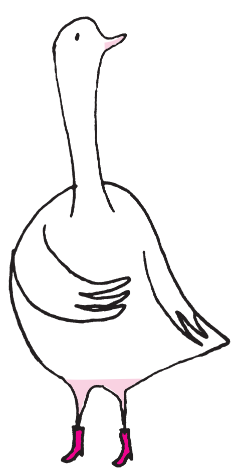
Czy można rozprostować jeden rząd naszej konstrukcji? Łatwo sprawdzić, że nie można, i nic dziwnego – z punktu widzenia geometrii hiperbolicznej rzędy nie są prostymi (są raczej przybliżeniami hiperbolicznego kształtu zwanego *horocyklem*). By znaleźć prostą, chwytamy nasz model w dwóch miejscach i rozciągamy, znajdując w ten sposób najkrótszą drogę między nimi. Po skonstruowaniu dużego trójkąta z trzech prostych możemy zaobserwować, że jego suma kątów jest mniejsza niż 180 stopni.

Co dalej? Teraz na różnych próbkach (żeby zachować stałą krzywiznę!) możemy wypróbować, jak zachowuje się płaszczyzna, gdy zwiększamy lub zmniejszamy n. Ciekawym rozszerzeniem jest również zrobienie pseudosfery: w tym celu po zrobieniu początkowego łańcuszka, wkłujmy się w najdalej leżące oczko (pierwsze, które zrobiliśmy) i po narzuceniu nitki, przeciągamy ją przez obie pętelki leżące na szydełku – stworzymy kółeczko. Jedno oczko łańcuszka na odwrócenie robótki i teraz spiralnie kontynuujemy algorytm, pamiętając, by co n-ty półsłupek robić „do tyłu" robótki.

Problem 153. z Księgi Szkockiej

*Wiesław ŻELAZKO**

*Instytut Matematyczny, Polska Akademia Nauk



Tytułowy problem, postawiony przez Stanisława Mazura 6 listopada 1936 roku, brzmi:

Czy dla każdej funkcji ciągłej $f(x,y)$ określonej w kwadracie $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ i dowolnej liczby dodatniej ε istnieją takie punkty kwadratu $(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)$ oraz liczby $c_1,\ldots,c_n$, że dla wszystkich punktów (x,y) tego kwadratu

$$\left| f(x,y) - \sum_{i=1}^{n} c_i f(x,y_i) f(x_i,y) \right| < \varepsilon.$$

Problem nie wygląda szczególnie interesująco, ale Mazur wiedział, że ma on związek z ważnym wówczas pytaniem: *czy każda ośrodkowa przestrzeń Banacha ma bazę Schaudera*. Baza Schaudera $(x_i)_1^\infty$ przestrzeni Banacha X to taki ciąg jej punktów, że dowolny element x tej przestrzeni daje się przedstawić w postaci $x = \sum_1^\infty f_i(x)x_i$, przy czym współczynniki $f_i(x)$ są funkcjonałami ciągłymi. Okazało się później (udowodnił to wielki matematyk francuski Alexander Grothendieck), że problem Mazura jest równoważny z problemem aproksymacji dla przestrzeni Banacha X: *czy każdy liniowy operator zwarty*