

O trójkątach na sferze

Michał MIŚKIEWICZ*

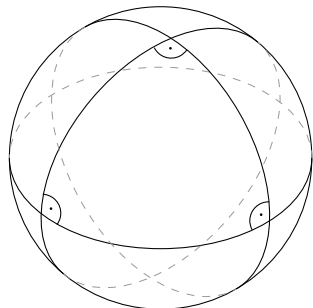
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Znany jest wzór na sumę kątów w trójkącie:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

Dotyczy on oczywiście trójkątów na płaszczyźnie. Jaki związek ma płaskość (lub zakrzywienie) z powyższym wzorem? O tym za chwilę.

Pójdźmy krok dalej i rozważmy trójkąty geodezyjne na sferze. Są to obszary wycięte ze sfery za pomocą trzech płaszczyzn przechodzących przez środek sfery. Dzięki temu wierzchołki takiego trójkąta są połączone najkrótszymi możliwymi łukami (czyli geodezyjnymi); wśród krzywych na sferze są to odpowiedniki odcinków na płaszczyźnie. Kąt między dwoma bokami takiego trójkąta możemy definiować jako kąt między płaszczyznami wycinającymi je lub, równoważnie, jako kąt między odpowiednimi prostymi stycznymi.



Rys. 1. Trójkąt o trzech kątach prostych

Przykładowy trójkąt z rysunku 1 powstał w wyniku trzech wzajemnie prostopadłych cięć, a więc każdy z jego trzech kątów ma miarę $\frac{\pi}{2}$.

W rezultacie ich suma przekracza o $\frac{\pi}{2}$ wartość, do której przyzwyczailiśmy się na płaszczyźnie!

Gdyby coś nas podkusiło, żeby policzyć pole takiego trójkąta, to zauważylibyśmy, że osiem takich trójkątów składa się na całą sferę.

Przyjmąwszy promień sfery równy 1, otrzymujemy pole trójkąta: $\frac{1}{8} \cdot 4\pi = \frac{\pi}{2}$. Czy zbieżność pola trójkąta z nadmiarem sumy kątów jest przypadkiem?

Przekonamy się, że nie, dowodząc, że wzór na sumę kątów w trójkącie geodezyjnym na sferze o promieniu r ma postać

$$(*) \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi + A/r^2,$$

gdzie α, β, γ są kątami trójkąta, a A jego polem; jest to szczególny przypadek tak zwanego *wzoru Gaussa-Bonneta*.

W tym celu oznaczymy płaszczyzny wycinające trójkąt jako p, q, r , zgodnie z rysunkiem 2. Każda z tych płaszczyzn rozcina przestrzeń (i sferę) na dwie części – za *dodatnią* uznamy tę, w której leży nasz trójkąt, a tę drugą za *ujemną* . Możemy teraz wygodnie oznaczyć wszystkie wycięte obszary – np. A_{++-} będzie obszarem leżącym po dodatniej stronie p i q oraz po ujemnej stronie r . Zauważmy trzy zależności:

- Ze względu na symetrię środkową mamy $|A_{++-}| = |A_{--+}|$ oraz wszystkie inne tożsamości powstałe przez zamianę znaków na przeciwne.
- Suma $A_{++o} := A_{+++} \cup A_{++-}$ daje razem obszar leżący po dodatniej stronie płaszczyzn p i q . Pole takiego wycinka jest proporcjonalne do kąta między tymi płaszczyznami, a więc wynosi $2\alpha r^2$; podobnie jest dla pozostałych obszarów tego typu.
- Suma $A_{+oo} := A_{+++} \cup A_{++-} \cup A_{+-+} \cup A_{+--}$ daje półsferę po dodatniej stronie p , a zatem $|A_{+oo}| = 2\pi r^2$; tak samo dla pozostałych półsfery.

Pozostaje nam zebrać te obserwacje, przeprowadzając rachunek oparty na wzorze włączeń i wyłączeń:

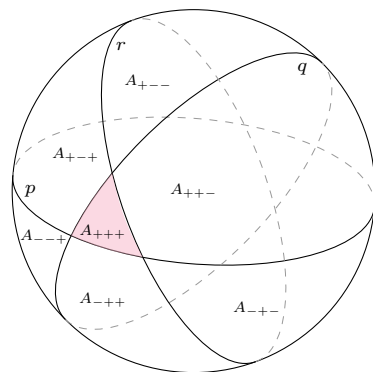
$$\begin{aligned} |A_{+oo} \cup A_{o+o} \cup A_{oo+}| &= (|A_{+oo}| + |A_{o+o}| + |A_{oo+}|) - \\ &\quad - (|A_{++o}| + |A_{o++}| + |A_{+o+}|) + |A_{+++}| = \\ &= 3 \cdot 2\pi r^2 - 2(\alpha + \beta + \gamma)r^2 + |A_{+++}|. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, obszar $A_{+oo} \cup A_{o+o} \cup A_{oo+}$ pokrywa całą sferę z wyjątkiem A_{---} , ma więc pole

$$|A_{+oo} \cup A_{o+o} \cup A_{oo+}| = 4\pi r^2 - |A_{---}| = 4\pi r^2 - |A_{+++}|.$$

Połączenie tych równości daje nam żądany wzór na pole trójkąta:

$$A = |A_{+++}| = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)r^2.$$



Rys. 2. Podział sfery na 8 obszarów

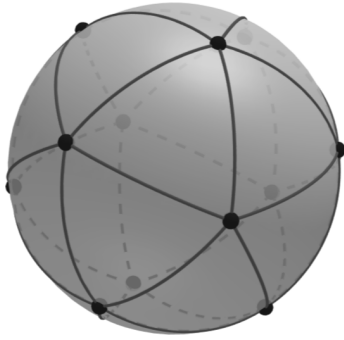


Rozwiązanie zadania F 994.

Siła F potrzebna do rozerwania półkul musi przewyższyć składową nacisku powietrza (atmosfery) prostopadłą do płaszczyzny złączenia półkul.

$$F = \pi a^2 p/4,$$

gdzie p oznacza ciśnienie atmosferyczne: $p \approx 10^5$ Pa. Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy $F \approx 13900$ N. Jest to siła w przybliżeniu równa ciężarowi średniego samochodu osobowego. 16 koni to jednak była przesada, ale jak przekonująco to wygląda na znanej wszystkim rycinie!



Rys. 3. Siatka odpowiadająca dwudziestościanowi foremnemu. Tutaj $V = 12$, $E = 30$, $F = 20$

Pokażemy teraz, jak wykorzystać uzyskany związek do otrzymania *wzoru Eulera*.

Twierdzenie (Euler). Rozważmy na sferze dowolną siatkę złożoną z trójkątów geodezyjnych i oznaczmy przez V , E , F odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i trójkątów w tej siatce. Zachodzi wówczas równość

$$V - E + F = 2.$$

Dowód. Powtórzmy tutaj (choć w całkiem innym wydaniu) rozumowanie z artykułu *Czy Ziemia jest płaska? A może jednak?* (Δ_{16}^{10}), zbadamy mianowicie sumę wszystkich kątów przy wierzchołkach. Ponieważ przy każdym wierzchołku kąty dodają się do 2π , suma ta wynosi $V \cdot 2\pi$. Z drugiej strony, sumę tę możemy otrzymać, dodając stronami zależności (*) dla wszystkich trójkątów w siatce – ponieważ pola trójkątów sumują się do całkowitego pola sfery, daje to $F \cdot \pi + 4\pi$ (bez straty ogólności przyjęliśmy $r = 1$). Po przyrównaniu tych dwóch wyników mamy $2V = F + 4$. Pozostaje przypomnieć sobie, że każda ściana ma trzy krawędzie, a każda krawędź rozdziela dwie ściany, skąd wnioskujemy dodatkową zależność $2E = 3F$. Te dwie równości pozwalają obliczyć

$$V - E + F = \frac{1}{2}(F + 4) - \frac{3}{2}F + F = 2,$$

co kończy dowód. □

Choć jest to istotnie trudniejsze do pokazania, analogiczną własność ma każda powierzchnia, nie tylko sfera. Wówczas wielkość $V - E + F$ (zwana *charakterystyką Eulera*) zależy tylko i wyłącznie od powierzchni, a nie od wyboru siatki. Przykład powierzchni o charakterystyce Eulera równej 0 można znaleźć we wspomnianym już artykule (Δ_{16}^{10}).

Wracając do zależności (*), Czytelnika może zdziwić, że znajomość kątów trójkąta pozwala na wyznaczenie pola – na płaszczyźnie przecież sprawa ma się zupełnie inaczej. Ten fenomen ma związek z niezerową *krzywizną Gaussa* sfery. Możemy nawet sformułować następującą definicję: jeśli na danej powierzchni dowolny trójkąt geodezyjny o kątach α , β , γ i polu A spełnia równość

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + K \cdot A,$$

to powiemy, że powierzchnia ta ma krzywiznę Gaussa stałe równą K .

Dla takiej powierzchni pole trójkąta można wyznaczyć ze wzoru $A = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)/K$, chyba że... wzór ten wymaga dzielenia przez zero! Ma to miejsce jedynie w przypadku płaszczyzny (lub jej „zwinieć”, na przykład walca), dla której mamy $K = 0$. Nasz dowód pokazuje natomiast, że sfera o promieniu r ma krzywiznę Gaussa równą $K = 1/r^2$. Odpowiada to dobrze intuicji mówiącej, że *duże sfery są prawie płaskie* – taka wydaje się na przykład powierzchnia Ziemi.

Idąc dalej za tą samą intuicją, moglibyśmy twierdzić, że *powierzchnie o dużej krzywiznie mają małe pole*. Tak jest w istocie i podejmiemy ten temat w kontynuacji niniejszego artykułu, która ukaże się już za miesiąc. Jako pierwszy krok w tym kierunku proponuję poniższe zadanie.

Zadanie. Dana jest powierzchnia \mathcal{M} wraz z siatką trójkątów, z których każdy w miejsce (*) spełnia nierówność $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi + K \cdot A$ z tym samym parametrem K . Wykażemy

$$V - E + F \geq \frac{K \cdot |\mathcal{M}|}{2\pi},$$

gdzie $|\mathcal{M}|$ jest polem \mathcal{M} , a V , E , F tak jak poprzednio oznaczają liczbę wierzchołków, krawędzi i trójkątów w siatce.

Uzasadnienie jest nietrudną modyfikacją dowodu twierdzenia Eulera, przy czym tutaj należy oczywiście operować na nierównościach. „Do przeczytania” za miesiąc!



Rozwiązanie zadania M 1627.

Zauważmy, że każdej parze atakujących się wież odpowiadają dokładnie trzy linie, w których nie znajdują się żadne inne wieże – mianowicie te linie, w których te dwie wieże się znajdują. Wobec tego liczba par wież nie przekracza $\lfloor \frac{m+n}{3} \rfloor$. Ponadto w każdej linii mogą pojawić się co najwyżej dwie wieże. Łącząc powyższe obserwacje, uzyskujemy, że liczba wież nie przekracza

$$2 \cdot \min \left\{ m, n, \left\lfloor \frac{m+n}{3} \right\rfloor \right\}.$$

Udowodnimy, że powyższe wyrażenie w istocie zadaje największą możliwą liczbę wież. Przypuśćmy, bez straty ogólności, że $m \geq n$ oraz, że m to liczba kolumn, a n – liczba wierszy. Nietrudno wskazać przykład, że jeśli $m = n$, to można osiągnąć ustawienie $2 \cdot \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ wież. Jeżeli $m \leq 2n$, to w $m - n$ wierszach umieszczamy po dwie wieże, tym samym redukując szachownicę do kwadratu o boku $2n - m$ i wobec obserwacji z poprzedniego zdania, znów otrzymujemy ustawienie realizujące $2 \cdot \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ wież. Wreszcie dla $m > 2n$ ustawiamy po dwie wieże w każdym wierszu i otrzymujemy ustawienie $2n$ wież.



Rozwiązanie zadania M 1628.

Ustawmy na zewnątrz szachownicy, wzdłuż jej boków, *dotatkowe* $2(m+n)$ wież (po jednej na każdą jednostkę obwodu szachownicy). Zauważmy, że każda *prawdziwa* wieża jest atakowana przez dokładnie dwie wieże dotatkowe. Stąd wniosek, że liczba wież prawdziwych nie przekracza połowy liczby wież dotatkowych, czyli $m+n$. Ustawiając wieże w czterech narożnikach szachownicy oraz wzdłuż dwóch jej prostopadłych boków, uzyskujemy przykład realizujący to szacowanie.