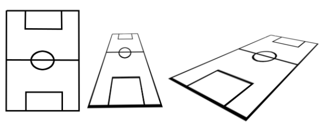
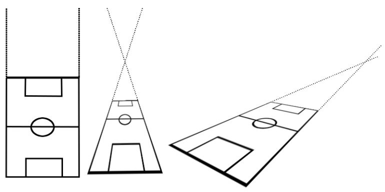
## Geometria rzutowa

„**Geometria rzutowa** to dział matematyki zajmujący się opisem tego, co nie zmienia się w figurach geometrycznych, gdy patrzymy na nie z różnych punktów widzenia. Innymi słowy: zróbmy zdjęcia figury z różnych stron i badajmy tylko to, co jest wspólne dla wszystkich zdjęć. Spoglądając z różnych stron na przykład na boisko piłkarskie, możemy stwierdzić, że raz wydaje nam się bliżej nieokreślonym czworokątem, raz trapezem, a z lotu ptaka – prostokątem.



Skoro odległości ani równoległość prostych nie zostają zachowane dla różnych zdjęć, to, jak łatwo się domyślić, w geometrii rzutowej nie ma miejsca dla twierdzenia Talesa ani Pitagorasa. Z drugiej strony, widzimy, że proste pozostają prostymi, a punkty punktami. A zatem właśnie o prostych, punktach i ich położeniu mówi geometria rzutowa.



Wydawać by się mogło, że płaszczyzna rzutowa nie powinna istotnie różnić się od euklidesowej. Aby się przekonać, czy tak jest w istocie, powróćmy na boisko piłkarskie. Spójrzmy na zdjęcie, na którym wygląda ono jak trapez. Z łatwością spostrzeżemy, że przedłużenia linii bocznych boiska przecinają się w jednym punkcie. Spójrzmy teraz na zdjęcie z lotu ptaka. Tutaj przedłużenia linii bocznych... wcale się nie przecinają. Nie można jednak sensownie mówić o położeniu prostych, jeśli nie da się stwierdzić, czy się przecinają, czy nie. Jedyne rozsądne rozwiązanie to dodanie do płaszczyzny tzw. punktów horyzontu. Jest to zupełnie naturalne właśnie dla naszej geometrii widzenia: przecież idąc torami kolejowymi, widzimy, że szyny łączą się w jednym punkcie na horyzoncie. Teraz już możemy spokojnie powiedzieć, że także na zdjęciu z lotu ptaka linie boczne boiska przecinają się. No tak, ale powinny przecież przecinać się w jednym punkcie, tak samo jak na zdjęciu z trapezem. Znów jedyne rozsądne rozwiązanie to utożsamienie dwóch przeciwległych punktów horyzontu, które od tej pory traktować będziemy jako jeden punkt. W ten sposób zakończyliśmy konstrukcję płaszczyzny rzutowej. (Należy jeszcze uzupełnić, że punkty horyzontu leżą na jednej prostej, którą trzeba dodać)." ♡

♡Przytoczony opis pochodzi z książki „Femme fatale. Trzy opowieści o królowej nauk" Witolda Sadowskiego.

Szersze omówienie można znaleźć w książce „Co to jest matematyka?" Richarda Couranta i Herberta Robbinsa.

Czyli *płaszczyznę rzutową* można traktować jak zwykłą płaszczyznę, do której dołączono punkty w nieskończoności. Nieco formalniej: rozważmy płaszczyznę $z = 0$ (czyli wszystkie punkty postaci $(x, y, 0)$) i oznaczmy ją przez $\pi$. Punkt $S = (0, 0, 1)$ leży nad tą płaszczyzną.

Każdy punkt płaszczyzny $\pi$ utożsamimy z prostą przechodzącą przez ten punkt i punkt $S$. Jasne jest, że nie wykorzystaliśmy wszystkich prostych przechodzących przez $S$ – a mianowicie prostych równoległych do płaszczyzny $\pi$. Zauważmy jeszcze, że punktom prostej $\ell$ leżącej na $\pi$ odpowiadają te proste przechodzące przez punkt $S$, które leżą na płaszczyźnie wyznaczonej przez punkt $S$ i prostą $\ell$. Niewykorzystana prosta to prosta przechodząca przez $S$ i równoległa do $\ell$ – nazwiemy ją punktem w nieskończoności prostej $\ell$ i oznaczymy przez $\ell_\infty$. W takim razie prostym równoległym $\ell_1, \ell_2$ leżącym na $\pi$ odpowiada ta sama prosta $\ell_\infty$ przechodząca przez $S$. Proste równoległe (stały się płaszczyznami) przecinają się teraz w nieskończoności wzdłuż prostej $\ell_\infty$. Płaszczyzna rzutowa może być potraktowana jako zbiór wszystkich prostych przechodzących przez $S$. Rozsądnie jest określić odległość punktów, czyli prostych przechodzących przez $S$, jako kąt między tymi prostymi.

Można płaszczyznę rzutową opisać inaczej: rozpatrzmy przekształcenie $\phi(x, y, z) = (xy, yz, zx, x^2 - y^2)$ (z przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^4$), które ograniczymy jedynie do punktów sfery o promieniu 1 i środku $(0, 0, 0)$ – więc punktów, dla których $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Każda prosta przechodząca przez punkt $(0, 0, 0)$ przebija opisaną sferę w dwóch punktach. Jeśli jednym z nich jest $(a, b, c)$, to drugim jest $(-a, -b, -c)$. Można się przekonać, że $\phi(x, y, z) = \phi(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(x, y, z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ albo $(-x, -y, -z) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. Można więc utożsamić prostą przechodzącą przez punkty $(0, 0, 0)$ oraz $(x, y, z)$ z punktem $\phi(x, y, z)$ (leżącym w czterowymiarowej przestrzeni). Niech zbiór $A$ składa się z tych punktów sfery, których współrzędne spełniają warunki: $|z| \leqslant \frac{1}{2}$ i $y \geqslant 0$, a $A_0$ z tych punktów zbioru $A$, dla których $y > 0$. Na zbiorze $A_0$ przekształcenie $\phi$ jest różnowartościowe. Natomiast $\phi(-x, 0, -z) = \phi(x, 0, z)$, więc przekształcenie $\phi$ przekształca punkty $(-x, 0 - z)$ i $(x, 0, z)$ na ten sam punkt (skleja je). Przekształcenie $\phi$ skleja „końcowe" punkty pasa $A$ z „przekręceniem". Powstały twór to wstęga Möbiusa. Jej brzeg to jedna linia (dzięki „przekręceniu"). Przekształcenie $\phi$ odwzorowuje zbiór $A$ oraz zbiór złożony ze wszystkich punktów sfery, dla których $|z| \leqslant \frac{1}{2}$, na ten sam zbiór. Zbiór tych punktów sfery, dla których $z \geqslant \frac{1}{2}$, można w naturalny sposób utożsamić z kołem. Możemy więc powiedzieć, że płaszczyzna rzutowa powstaje przez sklejenie brzegami koła ze wstęgą Möbiusa.

W artykułach „Dobble" ($\Delta^6_{18}$) oraz „Naprawdę ciekawa gra" ($\Delta^4_{14}$) można przeczytać o przyjemnym zastosowaniu płaszczyzny rzutowej, a jeszcze więcej w „Czy widział ktoś płaszczyznę rzutową?" ($\Delta^6_{11}$). Wszystkie wspomniane artykuły można znaleźć na naszej stronie `www.deltami.edu.pl`.

*Michał KRYCH*