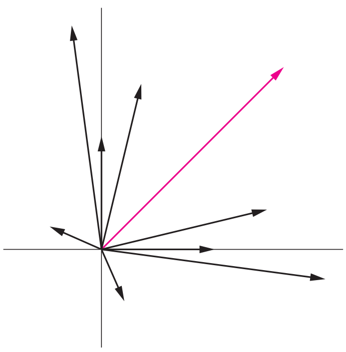
mała delta

Czasoprzestrzeń

czyli geometryczny odpowiednik szczególnej teorii względności, to dzieło Hermanna Minkowskiego (1864–1909), u którego zresztą Einstein studiował na politechnice w Zurichu. Pierwsza publikacja na ten temat ukazała się w 1909 roku i to tak nieszczęśliwie, że zmarły nagle Minkowski jej nie zobaczył.

Proponuję przyjrzenie się temu pomysłowi od strony geometrycznej i to w najprostrzym przypadku, gdy jest to czasoprzestrzeń dwuwymiarowa. Ma to być geometria, więc (przynajmniej na początku) nie będzie mowy o żadnym czasie.

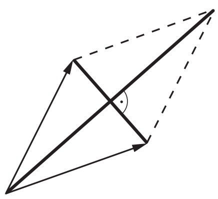
Geometria czasoprzestrzeni, to – oczywiście – geometria nieeuklidesowa, zatem nie wszystkie z postulatów Euklidesa są w niej prawdziwe. Wiemy, że pierwsza geometria nieeuklidesowa powstała przez zaprzeczenie piątego postulatu, który mówił o równoległych. W czasoprzestrzeni postulat piąty jest spełniony. Geometrię czasoprzestrzeni otrzymuje się przez zaprzeczenie postulatu czwartego, który orzeka:
(IV – Euklides) *wszystkie kąty proste są równe.*
Jak mogą wyglądać nierówne kąty proste?


Rys. 1

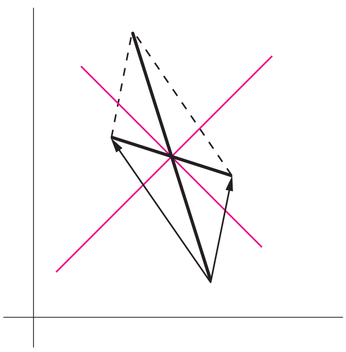
Zauważmy najpierw, że skoro z równoległością jest tak, jak w naszej geometrii, więc w czasoprzestrzeni możliwe są takie same przesunięcia, jak w geometrii szkolnej.

Z prostopadłością musi jednak być jakoś inaczej, niż jesteśmy przyzwyczajeni. Wprowadźmy więc układ współrzędnych. W zwykłej geometrii wektory $[a_1, a_2]$ i $[b_1, b_2]$ są prostopadłe, gdy $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0$. W czasoprzestrzeni będą one prostopadłe, gdy

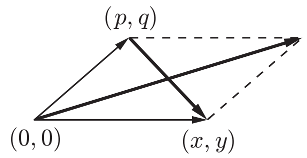
(1) $$a_1 \cdot b_1 - a_2 \cdot b_2 = 0.$$


Rys. 2

Ta minimalna zmiana daje właśnie to, o co chodzi. Teraz do dowolnego wektora $[p, q]$ jest prostopadły wektor $[q, p]$. Rysunek 1 pokazuje, co się stało: każda para strzałek jednakowej długości to wektory prostopadłe. Kąty proste nie są więc równe – są większe i mniejsze takie kąty. Ale najciekawsza jest strzałka kolorowa: ona jest prostopadła sama do siebie! Faktycznie proste sprawdzenie pokazuje, że każdy wektor $[p, p]$ jest prostopadły sam do siebie podobnie, jak i każdy wektor $[p, -p]$. Wektory (i proste) o takich kierunkach nazywają się *izotropowe*. Pojęcie to pozwala wyrazić (1) geometrycznie:
kąt jest prosty, gdy ma izotropową dwusieczną.
Mimo zaskoczenia okazuje się to zupełnie dobrym warunkiem, np. na płaszczyźnie proste, mające wspólną prostopadłą, są równoległe.


Rys. 3

Każdy wie, jak za pomocą prostopadłości określić równość odcinków, szczególnie, gdy można je przesuwać: zsuwamy je, by miały wspólny koniec, potem robimy z nich równoległobok i sprawdzamy, czy jest rombem, czyli **czy ma prostopadłe przekątne**! Rysunek 2 pokazuje to w przypadku euklidesowym, a 3 w przypadku czasoprzestrzeni. Ten drugi przypadek wydaje się jakiś dziwny, więc naturalnie nasuwa się pytanie o to, jak wobec tego w czasoprzestrzeni wyglądają okręgi.



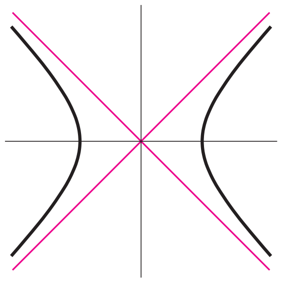
Rys. 4

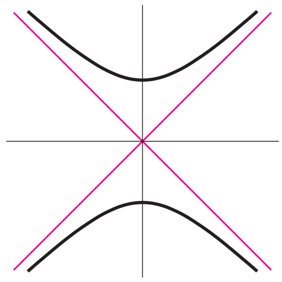
Najprościej sięgnąć tu po współrzędne. Warunek prostopadłości przekątnych, zgodnie ze wzorem (1) daje (w oznaczeniach z rysunku 4) warunek na prostopadłość wektorów przekątnych

$$(x+p)(x-p)-(y+q)(y-q)=0, \quad \text{czyli} \quad x^2-y^2=p^2-q^2.$$

I to jest równanie okręgu o środku w punkcie (0, 0) przechodzącego przez punkt o współrzędnych (p, q).

Co to jest? Taką figurę nazywa się hiperbolą równoosiową i jest to obrócony o $\pm 45°$ wykres odwrotnej proprcjonalności. Na rysunku 5 mamy przypadek, gdy $|p| > |q|$, na rysunku 6 – gdy $|p| < |q|$.


Rys. 5


Rys. 6

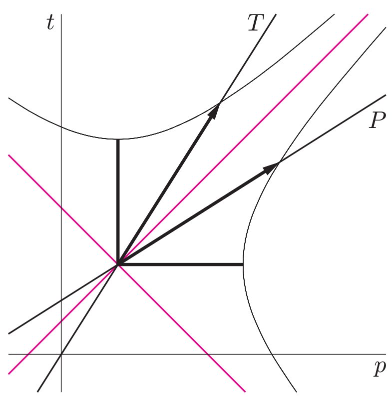
Okręgi okazują się dziurawe, bo każdy z łatwością wskaże proste przechodzące przez środek okręgu i okręgu nie przecinające. Warto zwrócić uwagę na inną geometryczną konsekwencję tej sytuacji. Gdy mamy odcinek odłożony od środka okręgu to z tego, czy przecięcie zawierającej go półprostej poprzeda jego drugi koniec, czy też jest odwrotnie możemy wnioskować o tym, czy jest od promienia dłuższy, czy krótszy. W świetle tego kryterium odcinki w czasoprzestrzeni mogą się nie dać porównać. Dokładniej: porównywać można odcinki, które wszystkie tworzą z tą samą osią układu współrzędnych kąty mniejsze od 45°. Zauważmy, że odcinki izotropowe nie należą do żadnej z tych grup – ich porównywać w ogóle nie można!

To samo analitycznie prezentuje się tak. W zwykłej geometrii równanie okręgu o środku (0, 0) przechodzącego przez (p, q) to $x^2+y^2=p^2+q^2$ i wtedy liczbę $\sqrt{p^2+q^2}$ nazywamy długością wektora $[p, q]$. Konsekwentnie tutaj długością takiego wektora powinien być pierwiastek z p^2-q^2, ale on dla jednej grupy wektorów da się wyciągnąć, dla drugiej trzeba by raczej wyciągać go z q^2-p^2. Wektory izotropowe mają tę sprawę z głowy – długość każdego z nich jest zero.

Mamy więc pokusę, aby wektory jednej z grup traktować inaczej, niż te z drugiej grupy. I fizycy tak robią. Jedne wektory uznają za przyzwoite, drugim wymyślają od *tachionów.* Aby wyjaśnić tę obelgę, trzeba niestety odwołać się do fizycznej interpretacji opisanej geometrii.

Jeśli uznamy poziomą oś (w wyżej wymiarowej przestrzeni – osie), a pionową za czas, to wówczas każda z linii prostych o kierunku bliższym pionu, niż poziomu oznaczać będzie (przy takim obiorze jednostek, by prędkość światła była równa 1) historię jakiegoś układu inercjalnego, tj. poruszającego się jednostajnie po prostej (w naszym przypadku ten drugi warunek jest oczywisty, ale są przecież czasoprzestrzenie o większej liczbie wymiarów). Linie bardziej poziome, niż pionowe, będą fizycznie bez sensu. W sposób naturalny uogólnia się to na krzywe, odmawiając prawa bytu tym, którym zdarza się mieć jako styczną „nielegalną” prostą. Te niedopuszczone krzywe to odpowiedniki nierzeczywistych przemieszczeń, odbywających się z prędkością większą od prędkości światła – *tachion* to w tłumaczeniu z greckiego *prędkościowiec.*

Wypada jednak przed zakończeniem zadać pytanie, po co było kwestionować IV postulat Euklidesa i narażać się na te wszystkie dziwności. Powód jest taki: chodzi o to, jak w naszym świecie opisywać świat poruszający się jednostajnie (i prostoliniowo) względem naszego. I tu przyjmuje się założenie, że czas pozostaje zawsze protopadły do przestrzeni. Jeśli ktoś znajduje się w spoczynku w takim świecie, poruszającym się względem naszego w sposób opisany przez linię T, to z jego punktu widzenia wszelkie zmiany to upływ czasu. Jemu więc przestrzeń będzie jawiła się jako linia P. Badanie relacji między tymi odmiennymi postrzeganiami czasu i przestrzeni – naszym i jego, to właśnie problem, dla opisu którego powołana została geometria czasoprzestrzeni.



Małą Deltę opracował Marek KORDOS