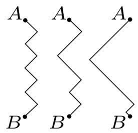
Posłowie: Zbiór, który nie jest domknięty



Optymalne trasy z punktu A do B, gdy wiatr wieje prosto z B do A przy dodatkowych założeniach opisanych obok. Każda z tych tras jest tak samo dobra.

Wyobraźmy sobie, że przyszło nam żeglować po jeziorze pod wiatr. Oczywiście nierozsądnie jest ustawić się dziobem żaglówki w stronę wiatru – wtedy na pewno nie popłyniemy we właściwą stronę – ale jak pokazuje teoria (i praktyka), rozwiązaniem jest konsekwentne halsowanie (tj. żeglowanie zygzakiem) pod odpowiednim kątem do wiatru. Ten kąt zależy od wielu czynników (m.in. konstrukcji żaglówki) i nie będziemy się zajmować jego wyznaczeniem. Zakładając, że nasza łódź jest niesamowicie zwrotna, a my – wytrawni żeglarze – potrafimy ją obsłużyć tak, że zwroty nie zabierają w ogóle czasu i nie powodują wytracania prędkości, to optymalną trasą takiego halsowania jest każda z linii łamanych przedstawionych na marginesie. Czyli zakładamy, że żaglówka płynie stale pod ustalonym kątem pod wiatr – tj. tym najlepszym kątem, który pozwala najszybciej dopłynąć do celu.

Tym razem ta sama żaglówka znalazła się na rzece. Rzeka płynie w przeciwnym kierunku niż wieje wiatr i prąd pcha nas w tę stronę, w którą chcemy popłynąć. Nurt rzeki ma to do siebie, że na środku rzeki jest najsilniejszy, a im bliżej brzegów, tym słabszy. Ponownie, żeby maksymalnie wykorzystać siłę wiatru, będziemy halsować. Z kolei, żeby wykorzystać sprzyjający prąd, będziemy trzymać się jak najbliżej środka rzeki.

Zastanówmy się, jaka trasa spośród wszystkich łamanych będzie najlepsza. Rzecz jasna im bliższa jest ona środka, tym lepiej. I nic nie stoi na przeszkodzie, żebyśmy wybrali łamaną znajdującą się dowolnie blisko* środka tej rzeki. Z drugiej strony dla każdej łamanej trasy zawsze istnieje „lepsza”, czyli bliższa środka. Ale z trzeciej strony nie może to być po prostu odcinek na środku rzeki, bo wtedy żaglówka w ogóle nie skorzysta z siły wiatru (tak jak przy halsowaniu na jeziorze). Okazuje się, że wśród różnych łamanych nie istnieje najlepsza w rozważanym sensie, tj. w zbiorze czegoś „brakuje”, zbiór nie jest **domknięty** w zbiorze wszystkich tras pomiędzy punktem A i B.

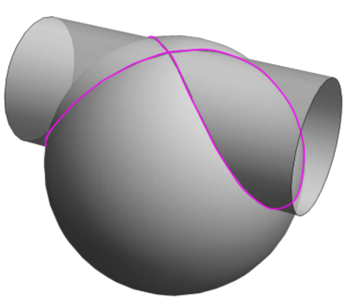
*Do określenia tej bliskości potrzebujemy pojęcia *metryki* opisanego na stronie 6. Można przyjąć metrykę opisaną w punkcie 9. tamtego artykułu.

Kamila ŁYCZEK

Geometria różniczkowa

Geometria różniczkowa zajmuje się własnościami zbiorów opisanych przy użyciu funkcji różniczkowalnych (zwykle wielu zmiennych). Zbiory można opisywać m.in. przy użyciu układów równań lub za pomocą parametryzacji. Na przykład układ równań

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ y^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$$



Rys. 1

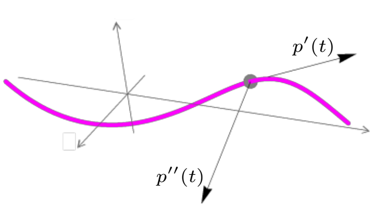
opisuje w trójwymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$ część wspólną sfery o promieniu 2 z walcem obrotowym o promieniu przekroju 1. Ta część wspólna jest linią o kształcie ósemki krzyżującej się ze sobą w punkcie, w którym walec jest styczny do sfery (rys. 1). Zbadajmy, jak wygląda ta ósemka (jest to tzw. krzywa Vivianiego) w okolicy tego skrzyżowania. W tym celu opiszmy ją parametrycznie jako drogę przebytą przez punkt o współrzędnych

$$p(t) = (2\sin t, \sin 2t, 1 + \cos 2t), t \in \mathbb{R}.$$

Dwa kolejne przejścia przez wierzchołek następują dla $t = 0$ oraz dla $t = \pi$. Rozpatrzmy wektor prędkości

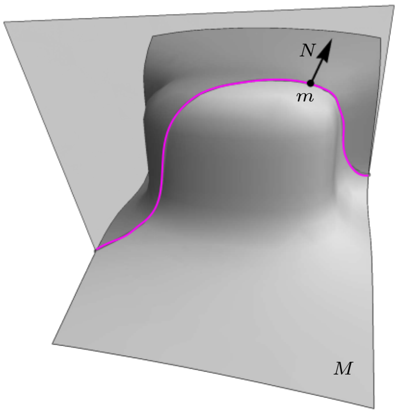
$$p'(t) = [2\cos t, 2\cos 2t, -2\sin 2t]$$

poruszającego się punktu w chwili t. Ponieważ $p'(0) = [2, 2, 0]$ i $p'(\pi) = [-2, 2, 0]$, widzimy, że wędrujący po ósemce punkt przechodzi przez wierzchołek pod kątem $\pi/4$ do osi walca, raz z jednej, raz z drugiej strony; zatem ósemka krzyżuje się ze sobą w wierzchołku pod kątem prostym. Czytelniku, spróbuj obliczyć kąt przecięcia w ósemce wyznaczonej przez walec o innym promieniu.



Rys. 2

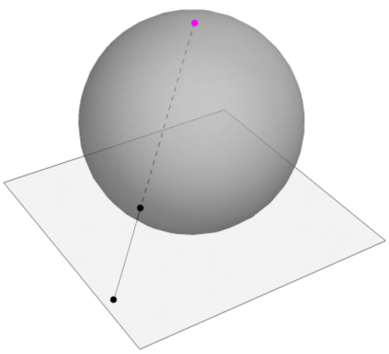
Pochodna parametryzacji $p'(t)$ jest wektorem prędkości, druga pochodna $p''(t)$ to wektor przyspieszenia. W sytuacji, gdy punkt porusza się wzdłuż krzywej z szybkością równą 1 (czyli długość wektora $p'(t)$ jest równa 1), punkt nie zwalnia i nie przyspiesza, więc jego wektor przyspieszenia $p''(t)$ jest prostopadły do wektora prędkości i opisuje zmianę jego kierunku (rys. 2). Długość wektora



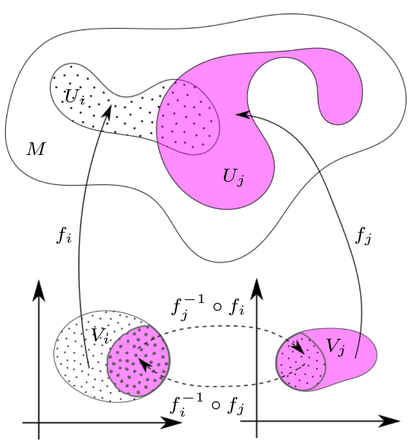
Rys. 3

przyspieszenia nazywa się wtedy **krzywizną danej krzywej w punkcie** $p(t)$. Im ta długość jest większa, tym ostrzej krzywa zakręca. Linia prosta ma w każdym punkcie zerową krzywiznę, a okrąg ma w każdym punkcie krzywiznę równą odwrotności promienia.

Rozpatrzmy teraz powierzchnię M w przestrzeni trójwymiarowej $\mathbb{R}^3$ i punkt m na niej oraz wybierzmy wektor N prostopadły do M w punkcie m. Dysponując pojęciem krzywizny krzywej, możemy zdefiniować krzywiznę powierzchni. Mianowicie, możemy rozpatrzyć wszystkie przekroje powierzchni M płaszczyznami zawierającymi punkt m i wektor N. Dla każdego z tych przekrojów możemy obliczyć jego krzywiznę w punkcie m oraz przypisać jej znak plus, jeśli jej wektor przyspieszenia jest skierowany zgodnie z N, oraz znak minus w przeciwnym przypadku (rys. 3). Okazuje się, że gdy będziemy obracać płaszczyznę przekroju wokół wektora N, to krzywizna przekroju będzie się zmieniać między dwiema skrajnymi wartościami (noszą one nazwę krzywizn głównych). Iloczyn tych dwóch krzywizn nazywa się **krzywizną Gaussa powierzchni** w punkcie m. Na przykład krzywizna Gaussa walca w dowolnym punkcie jest równa 0, a krzywizna sfery o promieniu r jest równa $1/r^2$. Krzywizna Gaussa ma ciekawą własność (udowodnioną przez Carla Gaussa): nie zmienia swojej wartości przy przekształceniu powierzchni zachowującym długości krzywych leżących na tej powierzchni. Oznacza to na przykład, że sfery (po rozcięciu) nie da się bez zmiany odległości przekształcić na kawałek płaszczyzny. Carl Gauss był tak dumny ze swojego twierdzenia, że nadał mu nazwę *theorema egregium* (twierdzenie chwalebne).


Rys. 4

Do opisu krzywych wystarcza jeden parametr, do opisu powierzchni potrzeba dwóch parametrów. Na przykład położenie punktu na sferze o środku w punkcie $(0,0,0)$ i promieniu r można opisać parametrycznie za pomocą dwóch parametrów (długości geograficznej ϕ i szerokości geograficznej θ, wzorem $p(\phi,\theta) = (r\cos\theta\cos\phi, r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta)$), jednak żadnemu z biegunów $(0,0,r)$ oraz $(0,0,-r)$ nie da się przypisać jednoznacznie pary współrzędnych. Można sparametryzować sferę bez jednego punktu za pomocą tzw. **rzutu stereograficznego** (w biegunie $(0,0,r)$ zapalamy żarówkę, a każdy punkt sfery rzuca cień na płaszczyznę styczną do sfery w przeciwnym biegunie $(0,0,-r)$, rys. 4). Całej sfery jedną parametryzacją objąć się nie da.



Rys. 5

Uogólnieniem krzywych i powierzchni są rozmaitości różniczkowe dowolnego wymiaru, które lokalnie wyglądają jak przestrzeń $\mathbb{R}^n$, ale nie muszą być zawarte w żadnej konkretnej przestrzeni $\mathbb{R}^m$. **Rozmaitość różniczkowa wymiaru n** to zbiór pokryty podzbiorami U_j, z których każdy posiada parametryzację $f_j : V_j \to U_j$ za pomocą funkcji różniczkowalnej n zmiennych określoną na otwartym podzbiorze V_j przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (rys. 5). Przy tym parametryzacje nachodzących na siebie podzbiorów U_i, U_j powinny być zgodne w tym sensie, że przekształcenie $f_i^{-1} \circ f_j : f_j^{-1}(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$ jest zadane funkcjami różniczkowalnymi. Na przykład dla sfery S można jako kawałki U_i wybrać sześć półsfer opisanych nierównościami

$$\begin{aligned} U_1 &= \{(x,y,z) \in S : x > 0\}, & U_2 &= \{(x,y,z) \in S : x < 0\}, \\ U_3 &= \{(x,y,z) \in S : y > 0\}, & U_4 &= \{(x,y,z) \in S : y < 0\}, \\ U_5 &= \{(x,y,z) \in S : z > 0\}, & U_6 &= \{(x,y,z) \in S : z < 0\}, \end{aligned}$$

a jako ich parametryzacje przyjąć rzuty wzdłuż odpowiednich osi, np.

$$f_1 : V_1 = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 < r^2\} \to U_1$$

określić wzorem

$$f_1(y,z) = (\sqrt{r^2 - y^2 - z^2}, y, z).$$

Równie dobrze można użyć dwóch parametryzacji sferycznych lub dwóch rzutów stereograficznych. Takie podejście daje szersze możliwości. Na przykład za pomocą powyższej konstrukcji zastosowanej do trzech podzbiorów U_j można opisać płaszczyznę rzutową, która nie jest powierzchnią orientowalną (zawiera wstęgę Möbiusa).

Jerzy KONARSKI